EXERCICES D'INTEGRATION

Classification Thèmes de MégaMaths

Docs de Dany-Jack MERCIER

Déterminer les primitives suivantes :

ⓐ $I_a = \int \frac{x e^{x}}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$ ⓑ $I_b = \int \frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}\,dx$

ⓒ $I_c = \int \frac{dx}{\operatorname{ch}x\sqrt{\operatorname{ch}2x}}$ ⓓ $I_d = \int \frac{x^4+4x}{(x^2-1)^3}\,dx$

ⓔ $I_e = \int \frac{dx}{\cos x + \cos 3x}$ ⓕ $I_f = \int \frac{dx}{\sin x - \cos x + \sqrt{2}}$

Indications : a) Poser $u^2 = 1+e^x$ b) Poser $y = \frac{1}{x}$ puis $t = \sqrt[3]{1+y^3}$

c) Poser successivement $u = e^x$, $v = u^2$, $v = \operatorname{sh}t$, $e^t = y$ (!)
d) Penser à des intégrations par parties ...
e) Poser $t = \sin x$ (Règles de Bioche...)

ⓐ Posons $1+e^x = u^2$ avec $u>1$. Alors $x = \ln(u^2-1)$ et $dx = \frac{2u}{u^2-1}\,du$,
d'où :

$$I_a = \int \frac{x e^x}{\sqrt{1+e^x}}\,dx = 2\int \ln(u^2-1)\,du = 2\left(\int \ln(u-1)+\ln(u+1)\,du\right)$$

$$= 2\left[(u-1)\ln(u-1)-(u-1)+(u+1)\ln(u+1)-(u+1)\right]+c$$

$$= 2\left[u\ln(u^2-1)+\ln(u+1)-\ln(u-1)-2u\right]+c$$

$$= 2\left[u\ln(u^2-1)+2\ln(u+1)-\ln(u^2-1)-2u\right]+c$$

$$I_a = 2\left[(x-2)\sqrt{1+e^x}+2\ln(1+\sqrt{1+e^x})-x\right]+c$$

ⓑ En posant $y = \frac{1}{x}$:

$$I_b = \int \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{y^3}}}{\frac{1}{y^2}}\left(-\frac{1}{y^2}\right)dy = -\int \frac{1}{y}\sqrt[3]{1+y^3}\,dy$$

Posons $t = \sqrt[3]{1+y^3} \iff y = (t^3-1)^{1/3}$, alors $dy = \frac{1}{3}(t^3-1)^{-\frac{2}{3}}.3t^2\,dt$

$$= t^2(t^3-1)^{-2/3}\,dt \text{ , et :}$$

$$I_b = -\int (t^3-1)^{-\frac{1}{3}}.t.t^2(t^3-1)^{-\frac{2}{3}}\,dt = -\int \frac{t^3}{t^3-1}\,dt = -\int 1+\frac{1}{t^3-1}\,dt$$

$$\boxed{I_b = -t - \int \frac{1}{t^3-1}\,dt} \quad (1)$$

(esp Dau ... 92-93)

* Décomposons la fraction rationnelle $\frac{1}{t^3-1}$ en éléments simples :

$$\frac{1}{t^3-1} = \frac{a}{t-1} + \frac{bt+c}{t^2+t+1} \quad \text{où } a = \frac{1}{3} \text{ et } \frac{1}{j-1} = bj+c \Rightarrow \begin{cases} b = -1/3 \\ c = -2/3 \end{cases}$$

Ainsi :

$$\int \frac{1}{t^3-t} = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{t-1} + \int \frac{-\frac{1}{3}t - \frac{2}{3}}{t^2+t+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{3}\ln|t-1| - \frac{1}{3}\int \frac{t+2}{t^2+t+1}\,dt$$

En remplaçant dans (1) :

$$\boxed{I_b = -t - \frac{1}{3}\ln|t-1| + \frac{1}{3}\int \frac{t+2}{t^2+t+1}\,dt} \qquad (2)$$

* Calcul de $\int \frac{t+2}{t^2+t+1}\,dt$:

$$\frac{t+2}{t^2+t+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2t+1}{t^2+t+1} + \frac{3}{2}\,\frac{1}{t^2+t+1}$$

et $t^2+t+1 = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$, donc :

$$\int \frac{t+2}{t^2+t+1} = \frac{1}{2}\ln(t^2+t+1) + \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dt$$

Comme $\int \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dt = \int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,du$ où $u = t+\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\cdot \text{Arctan}\frac{u}{\sqrt{\frac{3}{4}}} + k = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\text{Arctan}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right) + k$$

on obtient :

$$\boxed{I_b = -t - \frac{1}{3}\ln|t-1| + \frac{1}{6}\ln(t^2+t+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\,\text{Arctan}\,\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right) + k}$$

où $t = \sqrt[3]{1+\frac{1}{x^3}} = \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x}$

ⓒ $I_c = \int \frac{dx}{\operatorname{ch}x\sqrt{\operatorname{ch}2x}} = 2\sqrt{2}\int \frac{u\,du}{(u^2+1)\sqrt{u^4+1}}$ si l'on pose $u = e^x$

Posons $v = u^2$, alors $dv = 2u\,du$ et :

$$I_c = 2\sqrt{2}\int \frac{\frac{1}{2}dv}{(v+1)\sqrt{v^2+1}} = \sqrt{2}\int \frac{dv}{(v+1)\sqrt{v^2+1}}$$

Posons $v = \operatorname{sh}t$:

$$I_c = \sqrt{2}\int \frac{\operatorname{ch}t\,dt}{(\operatorname{sh}t+1)\operatorname{ch}t} = \sqrt{2}\int \frac{dt}{\operatorname{sh}t+1} = \sqrt{2}\int \frac{dt}{\frac{e^t-e^{-t}}{2}+1}$$

Posons $e^t = y$:

$$I_c = \sqrt{2}\int \frac{\frac{1}{y}dy}{\frac{y-y^{-1}}{2}+1} = 2\sqrt{2}\int \frac{dy}{(y+1)^2-2}$$

Une primitive de $\frac{1}{a^2-x^2}$ étant $\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|$ sur $\mathbb{R}\setminus\{\pm a\}$, on obtient :

$$I_c = -2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}+(y+1)}{\sqrt{2}-(y+1)}\right| + k$$

$$\boxed{I_c = \ln\left|\frac{y+1-\sqrt{2}}{y+1+\sqrt{2}}\right| + k}$$

où $y = e^t = e^{\operatorname{Argsh}v} = e^{\operatorname{Argsh}u^2} = e^{\operatorname{Argsh}e^{2x}}$.

Rappelons que $\operatorname{Argsh}v = \ln(v+\sqrt{v^2+1})$ (*), alors $\boxed{y = e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+1}}$

(*) <u>NB</u> : cela provient du tableau des primitives :

$$\left.\begin{array}{l}(\operatorname{Argsh}v)' = \frac{1}{\sqrt{v^2+1}} \\ \left(\ln(v+\sqrt{v^2+1})\right)' = \frac{1}{\sqrt{v^2+1}}\end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{Argsh}v = \ln(v+\sqrt{v^2+1}) + k$$

et la cte k est nulle (faire $v=0$...)

(d) $I_d = \int \frac{x^4+4x}{(x^2-1)^3}$

La méthode générale voudrait que l'on développât la fraction rationnelle en éléments simples. Il vaut mieux faire baisser les degrés au numérateur et au dénominateur en utilisant des intégrations par parties :

$$I_d = \int \left(\frac{1}{2}x^3+2\right)\cdot\frac{2x}{(x^2-1)^3} = \left[\left(\frac{1}{2}x^3+2\right)\cdot\frac{(x^2-1)^{-2}}{-2}\right] - \int \frac{3}{2}x^2\cdot\frac{(x^2-1)^{-2}}{-2}\,dx$$

$$= \left(-\frac{x^3}{4}-1\right)\cdot\frac{1}{(x^2-1)^2} + \frac{3}{4}\int x^2\,\frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx$$

et on recommence :

$$\int x^2\cdot\frac{1}{(x^2-1)^2}\,dx = \int \frac{1}{2}x\,\frac{2x}{(x^2-1)^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}x\,\frac{(x^2-1)^{-1}}{-1}\right] - \int \frac{1}{2}\cdot\frac{(x^2-1)^{-1}}{-1}$$

$$= -\frac{x}{2(x^2-1)} + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2-1}$$

$$= -\frac{x}{2(x^2-1)} - \frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + k$$

Finalement $I_d = \left(-\frac{x^3}{4}-1\right)\cdot\frac{1}{(x^2-1)^2} - \frac{3}{8}\,\frac{x}{x^2-1} + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right| + k$

(e) $I_e = \int \frac{dx}{\cos x+\cos 3x}$

La forme différentielle $\frac{dx}{\cos x+\cos 3x}$ est invariante par le changement de x en $\pi - x$, donc on fait le chgt de variable $t=\sin x$

(Règles de Bioche, [T] Intégration).

$$\cos x+\cos 3x = \cos x + \cos x\cos 2x - \sin x\sin 2x$$
$$= \cos x + \cos x\,(2\cos^2 x - 1) - \sin x \,.\, 2\sin x\cos x$$
$$= 2\cos^3 x - 2\cos x\,(1-\cos^2 x)$$
$$= 4\cos^3 x - 2\cos x$$

$$I_e = \int \frac{dx}{2\cos x(2\cos^2 x - 1)} = \int \frac{\cos x\, dx}{2\cos^2 x\,(2\cos^2 x - 1)} = \int \frac{dt}{2(1-t^2)(2(1-t^2)-1)}$$

$$= \int \frac{dt}{-4(1-t^2)(t^2-\frac{1}{2})}$$

On décompose en éléments simples :

$$\frac{1}{4(t^2-1)(t^2-\frac{1}{2})} = \frac{a}{t-1} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{t-\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{d}{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

On trouve : $a=\frac{1}{4}$ et $c=-\frac{\sqrt{2}}{4}$, d'où $b=-\frac{1}{4}$ et $d=\frac{\sqrt{2}}{4}$ puisque la fraction rationnelle est paire. D'où :

$$I_e = \frac{1}{4}\int\frac{dt}{t-1} - \frac{1}{4}\int\frac{dt}{t+1} - \frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{dt}{t-\frac{1}{\sqrt{2}}} + \frac{\sqrt{2}}{4}\int\frac{dt}{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{2}t+1}{\sqrt{2}t-1}\right| + k$$

$$\boxed{I_e = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\sin x - 1}{\sin x + 1}\right| + \frac{\sqrt{2}}{4}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\sin x + 1}{\sqrt{2}\sin x - 1}\right| + k}$$

NB : Le chgt de variable $t=\tan\frac{x}{2}$ permet d'aboutir à :

$$I_e = \int\frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)(t^4-6t^2+1)}\,dt$$

et donc à une décomposition en éléments simple plus malaisée. En règle général, on utilise le chgt de variable $t=\tan\frac{x}{2}$ que si les règles de Bioche sont inutilisables.

(8) $I_8 = \int \frac{dx}{\sin x - \cos x + \sqrt{2}}$

$\sin x - \cos x = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x\right) = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

Donc $I_8 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dt}{\sin t + 1}$ où $x - \frac{\pi}{4} = t$

Posons $u = \tan\frac{t}{2}$. Alors $t = 2\,\mathrm{Arctan}\,u \Rightarrow dt = \frac{2}{1+u^2}du$ et $\sin t = \frac{2u}{1+u^2}$, soit :

$$I_8 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\left(\frac{2u}{1+u^2}+1\right)}\cdot\frac{2}{1+u^2}du = \frac{2}{\sqrt{2}}\int\frac{du}{(1+u)^2}$$

$$= \sqrt{2}\cdot\frac{-1}{1+u} + k$$

$$\boxed{I_8 = \frac{-\sqrt{2}}{1+\tan\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)} + k}$$

NB : Plus subtilement

$$I_8 = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{dx}{\frac{\sin x}{\sqrt{2}} - \frac{\cos x}{\sqrt{2}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{dx}{2\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{cotan}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right) + k$$

puisque $\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$

©MARIE-CHRISTINE
1978-79

Étude de la fonction : $x \to \int_a^x f(t)\,dt$ à finir

Leçon n°21 Introduction

(mauvais) On sait que si f est une fonction intégrable et définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, non réduit à un pt et si $a \in I$ et si F est une primitive de f, on a

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a), \quad x \in I \qquad (1)$$

Si F est une fonction élémentaire, l'étude de la fonction $x \to \int^x f(t)\,dt$ est alors traditionnelle. L'exposé consiste à étudier cette fonction dans le cas où les primitives n'ont pas d'expression usuelle. C'est le cas de $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R} \;/\; f(x) = \frac{1}{x}$

I Étude de $F : x \to \int_a^x f(t)\,dt$:

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point, et non vide, f étant intégrable sur $[a, x]$, $\forall x \in I$

1. Ens de définition : I

2. Réduction de l'ens de définition :

• Parité : Proposition :
si $a = 0$ et si f est paire (resp impaire) alors F est impaire (resp paire)
démonstration
$\forall x \in I$, $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\,dt$ soit $u = -t$ $du = -dt$

$$F(-x) = \int_0^x -f(-u)\,du \quad \text{or } \forall u \; f(-u) = f(u)$$
$$= -\int_0^x f(u)\,du = -F(x)$$

• Périodicité : Proposition :
si f est périodique de période T et si T vérifie $\int_a^{a+T} f(t)\,dt = 0$ alors F est périodique de période T
démonstration :
Supposons que $\forall x \in I$ $f(x+T) = f(x)$
$\forall x \in I$, $F(x+T) = \int_a^{x+T} f(t)\,dt = \left(\int_a^{a+T} + \int_{a+T}^{x+T}\right) f(t)\,dt$
soit $u = t - T$ $du = dt$ $F(x+T) = \int_a^{a+T} f(t)\,dt + \int_a^x f(u+T)\,du$
or $\forall u \in [a, x]$, $f(u+T) = f(u)$
d'où $F(x+T) = \underbrace{\int_a^{a+T} f(t)\,dt}_{=0} + \int_a^x f(u)\,du = F(x)$.

3. Sens de variation :
Proposition :
Si f est ≥ 0 sur I (resp $f \leq 0$) alors F est croissante sur I (resp décroissante)
démonstration :
$\forall x, x' \in I \,/\, x > x'$ $F(x) - F(x') = \int_{x'}^x f(t)\,dt \geq 0 \to F(x) \geq F(x')$
(?)

4. Continuité : Proposition :
F est continue en tout point de I
démonstration :
Soit $x_0 \in I$ et soit $\varepsilon > 0$, considérons $\alpha = \frac{\varepsilon}{M+1}$ où M est un majorant de f sur J intervalle ouvert $\subset I$ contenant x_0 $\forall x \in J$, $|f(x)| \leq M$
alors $\forall x \in I \,/\, |x - x_0| < \alpha \to |F(x) - F(x_0)| = \left|\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right| \leq \int_{x_0}^x |f(t)|\,dt$
$\leq |x - x_0|\, M < \varepsilon$

3. Dérivabilité :

Théorème :

- si f est continue en $x_0 \in \overset{\circ}{I}$ (extension à un intervalle) alors F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$ voir dernière (2)
- F est alors la seule primitive de f nulle en a (si f continue sur I)

démonstration :

- si $\varepsilon > 0$, $\exists \alpha > 0 \,/\, \forall x \in I \,/\, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

alors $\forall x \in I \,/\, 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right|$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} \frac{f(t)\,dt}{x - x_0} - \int_{x_0}^{x} \frac{f(x_0)\,dt}{x - x_0} \right| \leq \int_{x_0}^{x} \frac{|f(t) - f(x_0)|\,dt}{|x - x_0|} < \varepsilon$$

- on a $F(a) = 0$ et si G est une autre primitive de f, $G'(x) = F'(x) = f(x)\ \forall x \in I$
$\Rightarrow G(x) - F(x) = $ cte $\Rightarrow G(a) \neq 0$

Exemples

- soit $f(t) = 0$ si $t < 0$, $f(t) = 1$ si $t > 0$, $a = 0$, $F(x) = 0$ si $x \leq 0$, $= x$ si $x \geq 0$
F n'est pas dérivable en 0 car $F'_g(0) = 0$ et $F'_d(0) = 1$.
- soit $f(t) = 0$ si $t \neq 0$ et $f(t) = 1$ si $t = 0$ alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = 0$
donc F dérivable mais f non continue et $F' = 0 \neq f$.

II Compléments et Applications : voir étude aux bornes

1. Théorème :

si $I = [a, +\infty[$ et si $\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in I}} f = 0$ alors $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \int_a^x f(t)\,dt = 0$

démonstration : pas clair voir dernière (1)

soit $\varepsilon > 0$ et soit $\varepsilon' = \varepsilon/2$, alors $\exists A > 0 \,/\, \forall x \in I \,/\, |x| > A \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon'$

On a

$$\left| \frac{1}{x} \int_a^x f(t)\,dt \right| = \left| \frac{1}{x} \int_a^A f(t)\,dt + \frac{1}{x} \int_A^x f(t)\,dt \right|$$ on peut tjrs prendre $A > a$.

$$\leq \frac{1}{x} \underbrace{\left| \int_a^A f(t)\,dt \right|}_{\text{cte} = B} + \frac{1}{x} \underbrace{\left| \int_A^x f(t)\,dt \right|}_{\leq (x-a)\varepsilon'}$$ pour $|x| > A$

on voudrait que $\frac{B - A\varepsilon'}{x} + \varepsilon' < 2\varepsilon'$ $\Leftrightarrow x > \frac{B - \varepsilon' A}{\varepsilon'}$

soit $\alpha = \sup\left(A, \frac{B - \varepsilon' A}{\varepsilon'}\right)$, $\forall x \in I \,/\, |x| > \alpha \Rightarrow \left| \frac{1}{x} \int_a^x f(t)\,dt \right| < \varepsilon$

2. Intégrales définies :

Théorème : (rappeler déf)

Si f est Riemann intégrable et si G est une primitive de f alors
$G(x) - G(a) = \int_a^x f(t)\,dt$

démonstration : soit I intervalle de $\mathbb{R}$ de déf. de f — preuve recopiée dans cmon 0005 le 15/10/05

soit S subdivision de $I = [a, b]$, $S = \{x_0 = a, x_1, \ldots, x_n = b\}$ telle que

$\forall \varepsilon > 0$, $\forall \xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $\left| \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) f(\xi_i) - \int_a^b f(t)\,dt \right| < \varepsilon$

Appliquons le théorème des accroissements finis à G sur $[x_i, x_{i+1}]$

$\exists \eta_i \in]x_i, x_{i+1}[\,/\, G(x_{i+1}) - G(x_i) = (x_{i+1} - x_i) f(\eta_i)$

soit $\xi_i = \eta_i$ alors $\left| \sum^{n} [G(x_{i+1}) - G(x_i)] - \int_a^b f(t)\,dt \right| < \varepsilon$

(1)

Proposition : $I = [a, +\infty[$. Si $\lim_{x \to +\infty} f = 0$, alors $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} \int_a^x f(t)\,dt = 0$.

Preuve : Soit ε fixé.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \,/\, x > N \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$ et l'on peut choisir $N > a$

Ainsi $\left| \int_N^x f(t)\,dt \right| \leq \int_N^x |f(t)|\,dt \leq \varepsilon (x - N) \leq \varepsilon x$
$(x > N)$

d'où $\left| \frac{1}{x} \int_a^x f(t)\,dt \right| \leq \frac{1}{x} \left| \int_a^N f(t)\,dt \right| + \underbrace{\frac{1}{x} \left| \int_N^x f(t)\,dt \right|}_{\leq \varepsilon}$

N est fixé. $\left| \int_a^N f(t)\,dt \right|$ est une constante notée A_N.

$\exists M > 0 \,/\, x > M \Rightarrow \frac{A_N}{x} < \varepsilon$.

Pour $x > \sup(M, N)$, on aura : $\left| \frac{1}{x} \int_a^x f(t)\,dt \right| \leq 2\varepsilon$ CQFD

(2)

Théorème : Si f est continue en $x_0 \in \mathring{I}$, alors F est dérivable en x_0 et $F'(x_0) = f(x_0)$
(extention à $\mathring{I}$)

Corollaire 1 : Soient u et v deux fcts num. dérivables sur $D \subset \mathbb{R}$ (où D = ouvert de $\mathbb{R}$)
Si $u(D) \subset I$ et $v(D) \subset I$, alors la fct $G : D \to \mathbb{R}$; $G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt$
est dérivable sur D et $G'(x) = f(v(x)).v'(x) - f(u(x))\,u'(x) \quad \forall x \in D$.

Corollaire 2 : Si f admet une limite à droite en $x_0 \in I$ (resp. à gauche), alors F est dérivable à droite en x_0 (resp. à gauche en x_0) et $F'_d(x_0) = f(x_0 + 0)$ (resp. $F'_g(x_0)$ $= f(x_0 - 0)$)

(exactement la m̂ demonstration que le théorème.)

d'où $\left| G(b) - G(a) - \int_a^b f(t)\,dt \right| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow G(b) - G(a) = \int_a^b f(t)\,dt$

3. <u>Exemple</u> soit $I = \int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ $\quad f : I[0, 1/2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$ est continue sur I

$F(x) =$ Arc sin x
est une primitive de f
$I =$ Arc sin $1/2$ − Arc sin 0 $= \frac{\pi}{6}$

or $0 \leq t \leq 1/2 \Leftrightarrow 1 \leq \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \int_0^{1/2} dt \leq \int_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \leq \int_0^{1/2} \frac{2dt}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{\pi}{6} \leq 1/\sqrt{3} \Leftrightarrow 3 \leq \pi \leq 2\sqrt{3}$ ($\simeq 3,5$)

D'où une approximation de π

On pose $I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx$ et $J = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx$

a) Montrer que I et J existent, et que $I = J$

b) De $I = J = \frac{I+J}{2}$, déduire la valeur de I.

---

a) $\ln \sin x = \ln x - \frac{x^2}{6} + o(x^2)$ montre que $\ln \sin x \sim \ln x \quad (x \to 0_+)$.

Comme $\ln \sin x$ est toujours négatif sur $]0, \frac{\pi}{2}]$, on conclut que $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx$ est convergente comme $\int_0^{\pi/2} \ln x \, dx$.

2e méthode : On intègre par parties sur $[A, \frac{\pi}{2}]$, $A > 0$:

$$\int_A^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = \left[x \ln \sin x \right]_A^{\pi/2} + \int_A^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} \, dx$$

$\frac{x}{\operatorname{tg} x} \sim 1 \quad (x \to 0)$ donc $\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x} \, dx$ converge.

$\lim_{x \to 0_+} x \ln \sin x = 0$ donc $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x$ conv. et $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\operatorname{tg} x} \, dx$

* Le chgt de variable $t = \frac{\pi}{2} - x$ montre que $I = J$.

b) $$\frac{I+J}{2} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin x \cos x) \, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \frac{\sin 2x}{2} \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin 2x \; - \frac{1}{2} (\ln 2) . \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin u \, \frac{du}{2} \; - \frac{\pi \ln 2}{4}$$

Mais $\int_0^{\pi} \ln \sin u \, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin u \, du + \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin u \, du}$ où $x = u - \frac{\pi}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin u \, du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx = I$$

$$= 2I$$

donc :

$$I = \frac{I+J}{2} = \frac{1}{4} . 2I - \frac{\pi \ln 2}{4} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = -\frac{\pi \ln 2}{2}}$$

Méthodes de calculs d'intégrales et applications

Exercices :

Commentaire :

① Calculer les intégrales :

$$\int_0^1 x^3+2x^2+5x-4\,dx \quad ; \quad \int_0^{\pi} \sin 2t\,dt$$

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (1+tg^2 x)\,dx \quad ; \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t + t\sin t}{\cos^2 t}\,dt$$

$$\int_0^3 \ln(2x+7)\,dx .$$

Exercice d'apprentissage

② L'intensité efficace I_e d'un courant alternatif est l'intensité d'un courant continu qui produirait à travers une résistance R le même effet calorifique pendant la durée d'une période.
Soit $I(t) = I_m \sin\omega t$ l'expression de l'intensité en fonction du temps t. Déduire une relation liant I_e et I_m de la loi de Joule :

$$R I_e^2 T = \int_0^T R I^2(t)\,dt$$

Application à l'Electricité

③ Calculer :

a) $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx$ b) $J = \int_0^t \sin^3 x \cdot \cos^2 x\,dx$

Peut-on éviter de linéariser ? Donner 2 méthodes de calcul pour I.

On en profite pour réviser les formules de trigonométrie, la linéarisation de $\sin^5 x$ et l'exponentielle complexe.

④ Calculer par intégration par parties :

$$\int_0^e (1+x+x^2)e^x\,dx \qquad \int_5^6 (2x+3)\ln x\,dx$$

Exercice d'apprentissage.

⑤ a) Etudier les variations et représenter graphiquement la fonction :

$$f(x) = x+1+\frac{4}{(x-1)^2}$$

b) Déterminer l'aire $S(\lambda)$ de la partie du plan située entre la courbe, son asymptote oblique et les droites d'équations $x=3$ et $x=\lambda$ $(\lambda>3)$.

c) Etudier la limite de $S(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$.

Application au calcul d'aires

©IUFM Antilles FEV 92

⑥ Formule de Wallis

Soit n un entier naturel. On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$

a) En intégrant par parties, montrer que :

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad \text{pour } n \geq 2.$$

b) En déduire I_{2n} et I_{2n+1} en fonction de n

c) Montrer que $0 \leq I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$ et en déduire que : $1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{2n+1}{2n}$.

La suite $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ tend-elle vers une limite quand n tend vers $+\infty$?

d) Déduire de c) :

$$\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{(2n-1)(2n-3)\dots 3 \times 1}{(2n)(2n-2)\dots 4 \times 2} \right]^2 \times (2n+1) = \frac{2}{\pi}$$

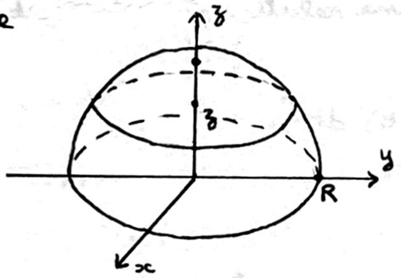
Objectifs :

- S'entraîner à la technique d'intégration par parties,
- Encadrer des intégrales à partir d'encadrements des fonctions à intégrer,
- Obtenir des approximations de π.

Prolongations : Écrire un programme permettant de calculer des valeurs approchées de π.

- Trouver $\lim_{n \to +\infty} I_n$ (Ind. : $(I_n)_n$ est déc. minorée, et $n . I_n . I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \geq 1$)

⑦ Calculer le volume d'une boule de rayon R.



Obj. : Appliquer le cours.
La formule $V = \int_a^b S(z) dz$ est supposée avoir été démontrée et utilisée en cours au sujet du calcul du volume d'un tétraèdre, par ex.
Cette formule fait partie des compétences exigibles en TC.

⑧ Soit α un réel strictement positif et distinct de 1. On désire étudier la convergence de la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $S_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$

1) Étudier la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et tracer l'allure de sa courbe représentative.

2) Prouver que $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha} dx \leq \frac{1}{k^\alpha}$ et en déduire l'encadrement $\int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx \leq S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx$ (*)

3) Calculer l'intégrale $\int_1^n \frac{1}{x^\alpha} dx$ et ré-écrire (*).

4) Prouver que S_n converge si $\alpha > 1$, et tend vers $+\infty$ si $0 < \alpha < 1$.

5) Supposons $0 < \alpha < 1$.

a) Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \frac{S_n}{n^{1-\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}$

b) Soit $u_n = S_n - \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$. Montrer, à l'aide des inégalités précédentes, que la suite $(u_n)_n$ est bornée et décroissante. Conclure.

- Problème de révision
- Proposé au Bac C avec $\alpha = \frac{1}{3}$.

Méthodes de calculs d'intégrales et applications

① Calculer les intégrales $\int_0^1 x^3+2x^2+5x-4 \, dx$; $\int_0^\pi \sin 2t \, dt$; $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (1+tg^2x)\,dx$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t + t\sin t}{\cos^2 t}\,dt$; $\int_0^3 \ln(2x+7)\,dx$

• exercice d'apprentissage

$$\int_0^1 x^3+2x^2+5x-4 = \frac{1}{4}+\frac{2}{3}+\frac{5}{2}-4 = -\frac{7}{12}$$

$$\int_0^\pi \sin 2t \, dt = \left[\frac{-\cos 2t}{2}\right]_0^\pi = 0$$

NB : lien avec l'aire sous la courbe. $t \mapsto \sin 2t$ périodique de période π.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (1+tg^2x)\,dx = \left[tg\, x\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = tg\frac{5\pi}{6} - tg\frac{\pi}{6} = -2\,tg\frac{\pi}{6} = -\frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos t + t\sin t}{\cos^2 t}\,dt = \left[\frac{t}{\cos t}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

$$\int_0^3 \ln(2x+7)\,dx = \left[\frac{1}{2}\Big((2x+7)\ln(2x+7)-(2x+7)\Big)\right]_0^3 = \dots$$

peut provenir de la remarque : $(x\ln x)' = \ln x + 1$ qui entraîne que

$F(x) = x\ln x - x$ est une primitive de $\ln x$.

② L'intensité efficace I_e d'un courant alternatif est l'intensité d'un courant continu qui produirait à travers une résistance R le même effet calorifique pendant la durée d'une période.

On a : $R I_e^2 T = \int_0^T R\, I^2(t)\,dt$, où $I(t) = I_m \sin\omega t$

Exprimer I_e en fonction de I_m.

• Application à l'électricité

$$I_e^2 = \frac{1}{T}\int_0^T I^2(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_0^T I^2(t)\,dt = \int_0^T I_m^2 \sin^2\omega t\,dt = I_m^2\int_0^T \frac{1-\cos 2\omega t}{2}\,dt$$

donc :
$$I_e^2 = \frac{I_m^2}{2T}\Bigg(T - \underbrace{\frac{\sin 2\omega T}{2\omega}}_{=0 \text{ car } T=\frac{2\pi}{\omega}}\Bigg)$$

$$I_e^2 = \frac{I_m^2}{2} \Rightarrow \boxed{I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}}}$$

③ Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\, dx$; $J = \int_0^t \sin^3 x \cos^2 x\, dx$ • révision des formules de trigo., linéarisation expo. complexe ⑤

Peut-on éviter de linéariser ? Donner 2 méthodes de calcul pour I.

* Calcul de I : 1re méthode : On linéarise $\sin^5 x$:

$$\sin^5 x = \frac{1}{(2i)^5}(e^{ix}-e^{-ix})^5 = \frac{1}{32i}\left(e^{i5x} - 5e^{i4x}e^{-ix} + 10e^{i3x}e^{-i2x} - 10e^{i2x}e^{-i3x} + 5e^{ix}e^{-i4x} - e^{-i5x}\right)$$

$$= \frac{1}{32i}\Big(2i\sin 5x - 5\underbrace{(e^{i3x}-e^{-i3x})}_{2i\sin 3x} + 10\underbrace{(e^{ix}-e^{-ix})}_{2i\sin x}\Big)$$

$$= \frac{1}{16}(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x)$$

d'où $\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\, dx = \frac{1}{16}\left[\frac{-\cos 5x}{5} + \frac{5}{3}\cos 3x - 10\cos x\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{16}\cdot\frac{128}{15} = \frac{8}{15}$

2e méthode : On écrit l'intégrale sous la forme $\int P(\cos x).\sin x\, dx$ où P est un polynôme.

$$I = \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sin^4 x}_{(1-\cos^2 x)^2}.\sin x\, dx = \int_0^{\pi/2}(1+\cos^4 x - 2\cos^2 x).\sin x\, dx = \left[-\cos x - \frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2}{3}\cos^3 x\right]_0^{\pi/2}$$

$$= 1 + \frac{1}{5} - \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$$

* Calcul de J :

$$J = \int_0^t \sin x.(1-\cos^2 x)\cos^2 x\, dx = \int_0^t \sin x.\cos^2 x - \sin x.\cos^4 x\, dx$$

$$= \left[-\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5}\right]_0^t = -\frac{\cos^3 t}{3} + \frac{\cos^5 t}{5} + \frac{2}{15}.$$

④ Calculer par intégration par parties :

$I = \int_0^e (1+x+x^2)e^x\, dx$ $J = \int_5^6 (2x+3)\ln x\, dx$ • ex. d'apprentissage

$$I = \left[(1+x+x^2)e^x\right]_0^e - \int_0^e (2x+1)e^x\, dx = \left[(1+x+x^2)e^x\right]_0^e - \left[(2x+1)e^x\right]_0^e + \int_0^e 2e^x\, dx$$

$$= (2-e+e^2)e^e - 2$$

$$J = \left[(x^2+3x)\ln x\right]_5^6 - \int_5^6 (x^2+3x)\frac{1}{x}\, dx$$

$$= 54\ln 6 - 40\ln 5 - \underbrace{\int_5^6 (x+3)\, dx}_{= \left[\frac{x^2}{2}+3x\right]_5^6 = \frac{17}{2}}.$$

(5) a) Etudier les variations et représenter graph. la fonction

$$f(x) = x + 1 + \frac{4}{(x-1)^2}$$

b) Déterminer l'aire $S(\lambda)$ de la partie située entre la courbe, l'asymptote oblique et les dtes $x = 3$ et $x = \lambda$ $(\lambda > 3)$

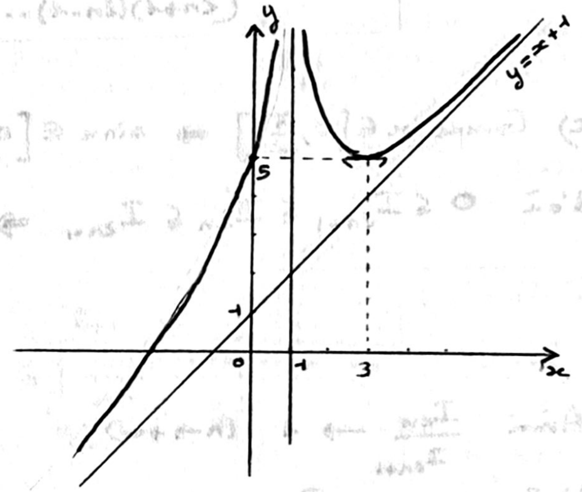
c) Trouver $\lim_{\lambda \to +\infty} S(\lambda)$

• Application au calcul d'aires

a) f est déf. et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{(x-1)^3} = \frac{(x-1)^3 - 2^3}{(x-1)^3} = \frac{(x-3)(x^2+3)}{(x-1)^3}$$

x	$-\infty$ ... 1	1 ... 3 ... $+\infty$
f'	$+$	$-$ 0 $+$
f	$-\infty$ ↗ $+\infty$	$+\infty$ ↘ 5 ↗ $+\infty$



$x = 1$ est asymptote verticale.

$y = x + 1$ est asymptote oblique pour $x \to \pm\infty$. La courbe est sur l'asymptote.

b) $S(\lambda) = \int_3^\lambda \frac{4}{(x-1)^2}\,dx = \left[\frac{-4}{x-1}\right]_3^\lambda = \frac{-4}{\lambda - 1} + 2$

c) $S(\lambda) \to 2$

(6) Formule de Wallis (cf uint0003)

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$, où $n \in \mathbb{N}$.

• entraînement au BAC
• ex. d'encadrement des intégrales à partir des encadrements des fcts à intégrer
• Obtention d'approximations de π

a) En intégrant par parties, montrer que $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

b) En déduire I_{2n} et I_{2n+1} en fct de n.

c) Mq $0 \leq I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1}$ et en déduire $1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{2n+1}{2n}$

La suite $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$ tend-elle vers une limite quand $n \to +\infty$?

d) Déduire de c) : $\lim_{n \to +\infty} \left[\frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3 \times 1}{(2n)(2n-2)\ldots 4 \times 2}\right]^2 \times (2n+1) = \frac{2}{\pi}$

(Prolongations : • écrire un programme calculant π • Trouver $\lim I_n$ ($(I_n)_n$ déc. minorée et $n I_n . I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$ si $n \geq 1$))

a) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x . \sin x\,dx = \left[\sin^{n-1} x\,(-\cos x)\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n-1) \sin^{n-2} x . \cos x . (-\cos x)\,dx$

$= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x . (1 - \sin^2 x)\,dx = (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n$

d'où $\boxed{I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}}$

b) $I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2(n-1)} = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2(n-1)} \cdots \frac{1}{2} I_0$ $\qquad I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}$

Si $n \geq 1$, $\boxed{I_{2n} = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3\times 1}{2n\,(2n-2)\ldots\ 2} \cdot \frac{\pi}{2}}$

$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} I_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{2}{3} I_1$ $\quad$ et $I_1 = 1$

Si $n \geq 1$, $\boxed{I_{2n+1} = \frac{2n\,(2n-2)\ldots \times 2}{(2n+1)(2n-1)\ldots \times 3}}$

c) Comme $x \in [0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow \sin x \in [0,1]$, on aura $0 \leq \sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x \leq 1$

d'où $0 \leq I_{2n+1} \leq I_{2n} \leq I_{2n-1} \Rightarrow 1 \leq \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}$

$$\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{1}{\frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}}} \underset{a)}{=} \frac{1}{\frac{2n}{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$$

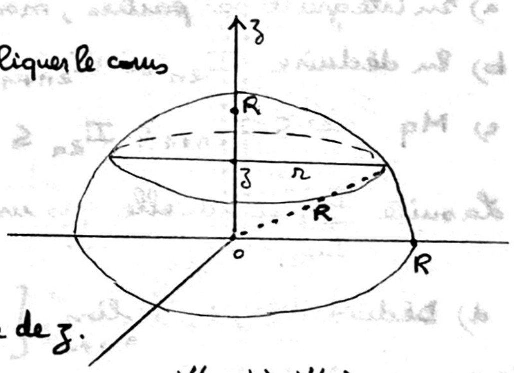
Ainsi $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \to 1 \quad (n \to +\infty)$

d) Explicitons $\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}$:

$$\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = \frac{(2n-1)\ldots 3\times 1}{2n\,(2n-2)\ldots 2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n+1)\ldots \times 3}{2n\,(2n-2)\ldots \times 2} = \left(\frac{(2n-1)\ldots \times 3 \times 1}{(2n)(2n-2)\ldots \times 2}\right)^2 \cdot (2n+1) \longrightarrow 1$$

D'où le résultat annoncé.

⑦ Calculer le volume d'une boule de rayon R $\quad$ • Obj : appliquer le cours



$S(z)$ = surface du disque intersection de la boule et du plan horizontal de côte z.

Pythagore donne : $r^2 = R^2 - z^2$

D'où $S(z) = \pi r^2 = \pi(R^2 - z^2)$. $S(z)$ est une fct continue de z.

Si $t > 0$ (petit), $\; t\,S(z+t) \leq V(z+t) - V(z) \leq t\,S(z) \Rightarrow S(z+t) \leq \frac{V(z+t)-V(z)}{t} \leq S(z)$

Si $t < 0$, petit, $\; -t\,S(z) \leq V(z) - V(z+t) \leq -t\,S(z+t)$ (car :

d'où encore : $S(z) \leq \frac{V(z+t)-V(z)}{t} \leq S(z+t)$.

On constate : V est dérivable et $V'(z) = S(z)$.

Ici : $V(z) - \underbrace{V(0)}_{=0} = \int_0^z S(z)\,dz \Rightarrow V(R) = \int_0^R \pi(R^2 - z^2)\,dz = \pi\left[R^2 z - \frac{z^3}{3}\right]_0^R = \frac{2\pi R^3}{3}$

$V(R)$ est le volume de la demi-boule. Le volume de la boule sera : $\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3}$.

⑧ $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \neq 1$. $S_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$

1) Etudier la fct $x \longmapsto \frac{1}{x^\alpha}$ et tracer sa courbe représentative.

2) Prouver que $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx \leq \frac{1}{k^\alpha}$ et en déduire $\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} \leq S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha}$ (*)

3) Calculer $\int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ et ré-écrire (*)

4) Prouver que S_n converge si $\alpha > 1$, et tend vers $+\infty$ si $0 < \alpha < 1$.

5) Supposons $0 < \alpha < 1$.

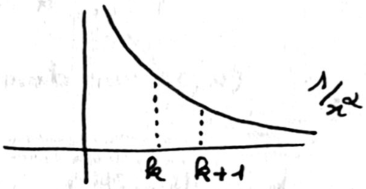
- Pb de révision.
- Proposé au Bac C avec $\alpha = \frac{1}{3}$

a) Mq $\lim_{+\infty} \frac{S_n}{n^{1-\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha}$

b) Soit $u_n = S_n - \frac{1}{1-\alpha} n^{1-\alpha}$. Utiliser les inégalités précédentes pour montrer que $(u_n)_n$ est bornée décroissante. Conclure.

---

2) Si $k \leq x \leq k+1$, $\frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \Rightarrow \frac{1}{(k+1)^\alpha} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{x^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$



En sommant : $\underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)^\alpha}}_{S_n - 1} \leq \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} \leq \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha}}_{S_n - \frac{1}{n^\alpha}}$

d'où $S_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} \leq S_n$

$$\boxed{\int_1^n \frac{dx}{x^\alpha} \leq S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^\alpha}} \quad (*)$$

3) $\int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{-1}{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}\right]_1^n = \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}$

(*) devient : $\boxed{\frac{1}{\alpha-1}\left(1 - \frac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leq S_n \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}}}$ (**)

4) * Si $\alpha > 1$, le mbre de dte de (**) est majoré par $\frac{\alpha}{\alpha-1}$. S_n, croissante et majorée par $\frac{\alpha}{\alpha-1}$, convergera et l'on aura : $\boxed{\frac{1}{\alpha-1} \leq \lim_{+\infty} S_n \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}}$

* Si $0 < \alpha < 1$, le mbre de gauche de (**) tend vers $+\infty$, donc $\lim_{+\infty} S_n = +\infty$

5) a) (**) $\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{\alpha-1}\left(n^{\alpha-1}-1\right)}_{\to \frac{1}{1-\alpha}} \leq n^{\alpha-1}S_n \leq \underbrace{\frac{1}{\alpha-1}\left(\alpha n^{\alpha-1}-1\right)}_{\to \frac{1}{1-\alpha}}$ (with $n^{\alpha-1} \to 0$)

d'où $\lim_{+\infty} n^{\alpha-1}S_n = \frac{1}{1-\alpha}$

b) L'encadrement de S_n permet d'avoir :

$$\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}}-1-n^{1-\alpha}\right) \leq S_n - \frac{1}{1-\alpha}n^{1-\alpha} \leq \frac{\alpha}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}n^{1-\alpha}$$

$$\frac{1}{\alpha-1} \leq u_n \leq \frac{\alpha}{\alpha-1}$$

$(u_n)_n$ est donc bornée.

* u_n décroît :

$$u_{n+1}-u_n = \underbrace{S_{n+1}-S_n}_{\frac{1}{(n+1)^\alpha}} - \underbrace{\frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha}-n^{1-\alpha}\right)}_{\int_n^{n+1} t^{-\alpha}\,dt} \leq 0 \quad \text{d'après le 2).}$$

Ccl : u_n décroît, est minorée, donc converge vers une constante c, et :

$$\boxed{S_n = u_n + \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}} . \qquad (0<\alpha<1)$$

Soit $A>0$. Nature de $\int_1^A \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x}$ suivant α et $\beta \in \mathbb{R}$.

Chgt de variable $u = \ln x$.

$$\int_1^A \frac{dx}{x^\alpha \ln^\beta x} = \int_0^{\ln A} \frac{e^u\, du}{e^{u\alpha}\, u^\beta} = \int_0^{\ln A} \frac{e^{u(1-\alpha)}}{u^\beta}\, du$$

sera de même nature que $\int_0^{\ln A} \frac{du}{u^\beta}$ car $\lim_{u\to 0} e^{u(1-\alpha)} = 1$

(et donc $\frac{e^{u(1-\alpha)}}{u^\beta} \underset{0}{\sim} \frac{1}{u^\beta}$), donc converge ssi $\beta < 1$.

CQFD

NB : On est habitués à voir la convergence de $\int_0^B \frac{du}{u^\beta}$ quand $B>0$ mais le résultat est identique quand $B<0$ grâce au simple chgt de variable $v = -u$:

$$\int_0^B \frac{du}{u^\beta} = \int_0^{-B} \frac{-dv}{(-v)^\beta} = (-1)^{\beta+1} \int_0^{-B} \frac{dv}{v^\beta}.$$

Obj. : • Étude d'une fct. dérivée de e^x
• Calcul d'int. par int. par parties
• Appl. à l'astrophysique.

Loi du rayonnement stellaire :

L'intensité d'une radiation provenant d'une étoile est fonction de la température T (en °K) et de la longueur d'onde λ du rayonnement (ie de sa couleur) :

$$I_\lambda = \frac{a}{\lambda^5} e^{-\frac{b}{\lambda T}}$$ a, b constantes positives (Loi de Planck)

a) Soit T une température donnée. L'intensité I_λ est maximale pour une longueur d'onde λ_m. Établir la relation :

$$\lambda_m T = c$$ (loi de Wien) (où c est une cte)

b) L'énergie totale E émise par seconde par une surface unitaire d'étoile est $E = \int_0^{\infty} I_\lambda \, d\lambda \doteq \lim_{\substack{A \to +\infty \\ \varepsilon \to 0_+}} \int_\varepsilon^A I_\lambda \, d\lambda$

Montrer que $E = d.T^4$ (loi de Stephan) où d = cte.

Pour cela, on pourra :

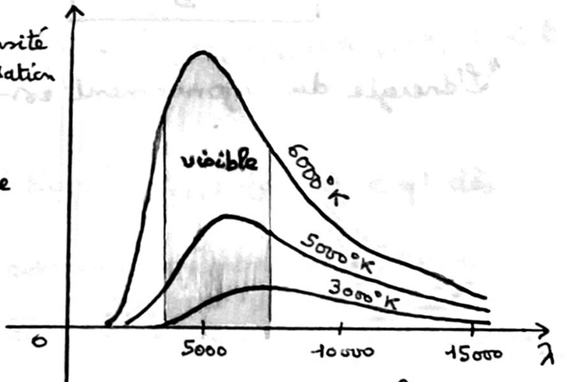
* Poser $J_n = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{k}{x}}}{x^n} dx$ (où k>0) et montrer que $J_n = \frac{n-2}{k} J_{n-1}$ pour $n \geq 3$ en utilisant une intégration par parties.

* En déduire J_5, puis E.

Prolongements : Donner l'allure de quelques courbes rep. de $\lambda \mapsto I_\lambda$ pour des val. diff. de T, et constater que lorsque T croît :

(l'étude a été amorcée au a), et permet d'utiliser la limite : $\lim_{x \to +\infty} x^\alpha e^{-x} = 0$ au prog. de Terminale)

- l'énergie E émise croît (c'est l'aire sous la courbe)
- le sommet de la courbe se déplace vers la gauche (loi de Wien)



(courbes d'énergie de corps noirs)

(réf. TCE Istra 83, 58 p193)

---

a) On étudie la fct $\lambda \mapsto I_\lambda$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$: posons $f(\lambda) = I_\lambda$.

$f'(\lambda) = \frac{ab - 5aT\lambda}{\lambda^7 T} . e^{-\frac{b}{\lambda T}}$ s'annule en $\lambda = \frac{b}{5T}$ qui correspond bien à un maximum. Ainsi $\boxed{\lambda_m T = \frac{b}{5}}$ est une constante.

b)

$$* \quad J_n = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{k}{x}}}{x^n}\,dx = \underbrace{\left[\frac{x^{-n+1}}{-n+1}\,e^{-\frac{k}{x}}\right]_0^{\infty}}_{=0} - \int_0^{\infty} \frac{x^{-n+1}}{-n+1}\cdot\frac{k}{x^2}\,e^{-\frac{k}{x}}\,dx \quad (\text{où } n \neq 1)$$

$$J_n = \frac{k}{n-1}\,J_{n+1}$$

d'où $J_{n+1} = \frac{n-1}{k}\,J_n \Longrightarrow \boxed{J_n = \frac{n-2}{k}\,J_{n-1}}$ pour $n \neq 2$.

* On déduit :

$$J_5 = \frac{3}{k}\cdot J_4 = \frac{3}{k}\cdot\frac{2}{k}\cdot\frac{1}{k}\cdot J_2 \quad \text{et} \quad J_2 = \int_0^{\infty}\frac{e^{-\frac{k}{x}}}{x^2}\,dx = \left[\frac{1}{k}\,e^{-\frac{k}{x}}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{k}$$

donc $J_5 = \frac{6}{k^4}$

* Enfin.

$$E = \int_0^{\infty} I_\lambda\,d\lambda = \int_0^{\infty}\frac{a\,e^{-\frac{b}{\lambda T}}}{\lambda^5}\,d\lambda = a\cdot\frac{6}{\left(\frac{b}{T}\right)^4} = \frac{6a}{b^4}\cdot T^4$$

$$\boxed{E = \frac{6a}{b^4}\cdot T^4}$$

"L'énergie du rayonnement est donc proportionnelle à T^4".

$f : [\alpha,\beta] \to [a,b]$ est une fct bijective, croissante et de classe C^1.

Calculer $A = \int_\alpha^\beta f(t)\,dt + \int_a^b f^{-1}(x)\,dx$

Montrer que ce résultat est encore vrai quand f est seulement continue au lieu d'être C^1. Quelle interprétation graphique peut-on donner de ce résultat ?

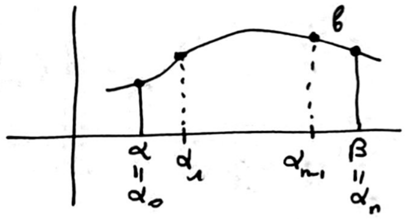
(réf. Serfati II .4.30)

* $f : [\alpha,\beta] \xrightarrow{C^1} [a,b]$ permet d'effectuer le chgt de variable $x = f(t)$ dans :

$$\int_a^b f^{-1}(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \underbrace{f^{-1}(f(t))}_{t} f'(t)\,dt$$

d'où $A = \int_\alpha^\beta \left(f(t) + t f'(t)\right) dt = \left[t f(t)\right]_\alpha^\beta = b\beta - a\alpha$

* Supposons f seulement continue. Étant strictement croissante, f^{-1} sera continue sur $[a,b]$, donc intégrable.



Notons $\{\alpha_i\}_{0\le i\le n-1}$ une subdivision de $[\alpha,\beta]$

Les sommes de Riemann de f convergeront vers $\int_\alpha^\beta f$, donc :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \qquad \sup_i |\alpha_{i+1} - \alpha_i| < \eta \Rightarrow \left| \int_\alpha^\beta f(t)\,dt - \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_{i+1})(\alpha_{i+1} - \alpha_i) \right| < \varepsilon$$

$\{f(\alpha_i)\}_{0\le i\le n-1}$ sera une subdivision de $[a,b]$, de pas $\sup |f(\alpha_{i+1}) - f(\alpha_i)| < \eta'$ dès que $\sup|\alpha_{i+1} - \alpha_i| < \eta$ (car f, continue sur $[\alpha,\beta]$ est uniformément continue sur cet intervalle). Ainsi, dès que $\sup|\alpha_{i+1} - \alpha_i| < \eta$:

$$\left| \int_a^b f^{-1}(x)\,dx - \sum_{i=0}^{n-1} \underbrace{f^{-1}(f(\alpha_i))}_{=\alpha_i} \left(f(\alpha_{i+1}) - f(\alpha_i)\right) \right| < \varepsilon$$

d'où $$\left| A - \sum_{i=0}^{n-1} f(\alpha_{i+1})(\alpha_{i+1} - \alpha_i) - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i \left(f(\alpha_{i+1}) - f(\alpha_i)\right) \right| < 2\varepsilon$$

$$\left| A - \sum_{i=0}^{n-1} \left(\alpha_{i+1} f(\alpha_{i+1}) - \alpha_i f(\alpha_i)\right) \right| < 2\varepsilon$$

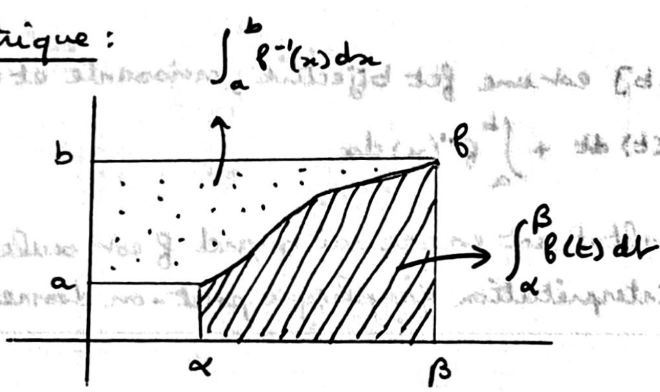
$$\left| A - (b\beta - a\alpha) \right| < 2\varepsilon$$

Cette inégalité étant vraie pour tout $\varepsilon > 0$, on conclut : $A = b\beta - a\alpha$

CQFD

.../...

Interprétation géométrique :



A = aire du grand rectangle − aire du petit rectangle.

...../...

INTEGRALE DE LEBESGUE

Th. convergence monotone : Si (f_n) est une suite croissante de fcts mesurables positives (ie $0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq \dots \leq \infty$), alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ est mesurable et :

$$\lim \int_X f_n \, d\mu = \int_X (\lim f_n) \, d\mu$$

Pour les séries : Si les f_n sont mesurables positives (ie à valeurs dans $[0,+\infty]$), alors :

$$\sum_{n\geq 0} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \sum_{n \geq 0} f_n \, d\mu$$

Lemme de Fatou : Si les f_n sont mesurables positives, on a :

$$\int_X (\underline{\lim} f_n) \, d\mu \leq \underline{\lim} \int_X f_n \, d\mu$$

Th. convergence dominée : Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables telles que :

* $f_n \to f$ p.p.x
* $\exists g \in L^1(X)$ $|f_n| \leq g$ p.p.x

Alors f est intégrable et $\lim \int_X f_n \, d\mu = \int_X (\lim f_n) \, d\mu$

Pour les séries : Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables telles que $\sum\limits_{n\geq 0} \int_X |f_n| \, d\mu < \infty$, alors la série $\sum f_n(x)$ converge p.p.x vers une fonction intégrable et $\sum\limits_{n\geq 0} \int_X f_n \, d\mu = \int_X \sum\limits_{n \geq 0} f_n(x) \, d\mu$

Th. de Lebesgue : Soit $f : T \times X \longrightarrow \mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}^n$) telle que $x \mapsto f(t,x)$ soit mesurable pour tout $t \in T$,

1) **Limite :** Si
* $\lim\limits_{t \to t_0} f(t,x) = f(x)$ pp$x$
* $\forall t \in T$ $|f(t,x)| \leq h(x)$ pp$x$ où $h \in L^1(X)$

Alors $\lim\limits_{t\to t_0} \int_X f(t,x) \, d\mu = \int_X f(x) \, d\mu$ (et m̂ : $\lim\limits_{t \to t_0} \int |f(t,x) - f(x)| = 0$)

2) **Continuité :** Si
* $f(t,x)$ continue en t_0 pp$x$
* $\forall t \in T$ $|f(t,x)| \leq h(x)$ pp$x$ où $h \in L^1(X)$

Alors $\lim\limits_{t \to t_0} \int_X f(t,x) \, d\mu = \int_X f(t_0,x) \, d\mu$

ie l'application $t \mapsto \int_X f(t,x) \, d\mu$ est continue en t_0.

3) Dérivabilité : Si $*$ $x \mapsto f(t,x)$ intégrable $\forall t \in T$ (Si $T=[a,b] \subset \mathbb{R}$, il suffit de le vérifier pour un seul $t \in T$)

$*$ $t \mapsto f(t,x)$ dérivable (resp. holomorphe) pp$x$

$*$ $\forall t \in T$ $\quad \left|\frac{\partial}{\partial t} f(t,x)\right| \leq h(x)$ pp$x$ où $h \in L^1(X)$

Alors l'application $g : t \mapsto \int_X f(t,x)\, d\mu$ est dérivable (resp. holomorphe) sur T et $g'(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, d\mu$.

Changement … 2 …

Th. de Lebesgue pour les séries de fonctions :

1) Limite : Si $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = f_n$ existe et si $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ est normalement convergente (ie au sens de $\| \|_\infty$, ie $\sum \|f_n\|_\infty < \infty$), alors $\lim_{x \to x_0} \sum_{n \geq 0} f_n(x) = \sum_{n \geq 0} f_n$

2) Continuité : Si $f_n(x)$ est continue en x_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ est normalement convergente, alors $x \mapsto \sum_{n \geq 0} f_n(x)$ est continue en x_0.

3) Dérivabilité : Si $*$ $f_n(x)$ dérivable sur X, de dérivée $f_n'(x)$

$*$ $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ et $\sum_{n \geq 0} f_n'(x)$ sont normalement convergentes

Alors $\sum_{n \geq 0} f_n(x)$ est dérivable sur X et $\left(\sum_{n \geq 0} f_n(x)\right)' = \sum_{n \geq 0} f_n'(x)$.

Th. de Tonelli : Si $f(x,y)$ est mesurable positive, alors :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dx \right) dy$$

Th. de Fubini : Si $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$, alors :

1) $f(x,.) \in L^1(\mathbb{R})$ pp$x$ (resp. ...)

2) $x \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy \in L^1(\mathbb{R})$ (resp. ...)

3) $\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dx \right) dy$

Comparaison Riemann - Lebesgue :

Prop. 1 : Soient $a, b \in \mathbb{R}$. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est $\mathcal{R}$-intégrable ssi elle est $\mathcal{L}$-intégrable et continue pp$x$. Alors les 2 intégrales coïncident.

Prop. 2 : Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ où $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \overline{\mathbb{R}}$. L'intégrale généralisée au sens de Riemann $\int_a^b f(x)dx$ est absolument convergente ssi f est $\mathcal{L}$-intégrable, et l'on a :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \mathcal{L} \int_{[a,b]} f(x)\, dx$$

<u>Changement de variable</u> : Soit $\varphi : \Omega_1 \to \Omega_2$ un C^1-difféomorphisme entre 2 parties de $\mathbb{R}^n$. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est intégrable sur Ω_2 ssi la fonction $(f \circ \varphi)\,|\det \varphi'(x)|$ est intégrable sur Ω_1 et $\displaystyle\int_{\Omega_2} f(y)\,dy = \int_{\Omega_1} f(\varphi(x))\,|\det \varphi'(x)|\,dx$

où l'on pose :

$$\det \varphi'(x) = J\varphi(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_n}(x) \end{vmatrix} \quad \text{et } \varphi(x) = (\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)).$$

<u>Th. de Radon-Nikodym</u> : Soit $(X, \mathcal{M}, \mu)$ un espace mesuré où μ est une <u>mesure positive et bornée</u>. Si λ est une autre mesure <u>positive</u>, <u>bornée</u> et "<u>absolument continue par rapport à μ</u>" (ie $\forall E \in \mathcal{M} \quad \mu(E) = 0 \Rightarrow \lambda(E) = 0$), alors :

$$\exists!\ h \in L^1(\mu) \qquad \forall E \in \mathcal{M} \qquad \lambda(E) = \int_E h\,d\mu$$

NB : 1) Ce Th. est vrai si μ est une mesure positive σ-finie sur $\mathcal{M}$ et λ une mesure complexe, donc bornée, sur $\mathcal{M}$.

2) Si μ et λ sont positives et σ-finies, le Th. est vrai à condition de remplacer $h \in L^1(\mu)$ par $h \in L^1_{loc}(\mu)$.

<u>Th. de dualité de Riesz</u> : Si μ est une mesure <u>positive σ-finie</u> et si ℓ est une forme linéaire continue sur L^p $(1 \leq p < \infty)$, alors :

$$\exists!\ g \in L^q \quad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right) \qquad \forall f \in L^p \qquad \ell(f) = \int_X fg\,d\mu \quad \text{et } \|\ell\| = \|g\|_q .$$

NB : Ainsi, il existe une isométrie (ie appl. linéaire bijective qui conserve la norme) de $(L^p)'$ sur L^q lorsque $1 \leq p < \infty$ et μ positive σ-finie.

<u>Attention</u> ! $L^1 \subsetneq (L^\infty)'$, ie toutes les applications de L^1 n'épuisent pas toutes les formes linéaires continues sur L^∞.

<u>Th. de Beppo-Lévi</u> : Si (f_n) est une suite monotone de fonctions mesurables et si f_1 est intégrable alors $\lim_{+\infty} f_n$ est mesurable et $\displaystyle\lim \int_X f_n\,d\mu = \int_X \lim_{+\infty} f_n\,d\mu$.

Formulaire "Intégrale de Lebesgue" : **Remarques :**

* Comment déduire le Th. de cv. dominée pour les séries du Th. de cv. dominée ?

(cf p.1) On a $\sum_{n\geq 0}\int f_n = \lim_{N\to+\infty}\int \underbrace{\sum_{n=0}^{N} f_n}$

$\left|\sum_{n=0}^{N} f_n\right| \leq \sum_{n\geq 0}|f_n|$ intégrable car $\int \sum_{n\geq 0}|f_n| = \sum_{n\geq 0}\int |f_n| < \infty$

↑ Th. cv monotone (cf p 1) pour les séries

d'où $\sum_{n\geq 0}\int f_n = \int \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N} f_n = \int \sum_{n\geq 0} f_n$

↑ Th. cv. dominée (cf p 1)

CQFD

Transformée de Fourier

I Transformée de Fourier de $f \in L^1(\mathbb{R})$

$\forall f \in L^1$ on pose $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x)\, dm(x)$ où $dm(x) = \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$

On note aussi $F(f) = \hat{f}$.

Théorème : $\forall f \in L^1$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(a) $g(x) = f(x)\, e^{i\alpha x} \Rightarrow \hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - \alpha)$

(b) $g(x) = f(x-\alpha) \Rightarrow \hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi)\, e^{-i\alpha\xi}$

} La transformée de Fourier remplace multiplication par un caractère par une translation et réciproquement

(c) $\forall g \in L^1$ $F(f * g) = F(f).F(g)$ } Elle remplace la convolution par le produit ordinaire

(d) $g(x) = \overline{f(-x)} \Rightarrow \hat{g}(\xi) = \overline{\hat{f}(\xi)}$

(e) $g(x) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right)$ où $\lambda > 0 \Rightarrow \hat{g}(\xi) = \lambda \hat{f}(\xi\lambda)$

(f) $g(x) = -ix f(x)$ et si $g \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{f}$ est différentiable et $(\hat{f})'(\xi) = \hat{g}(\xi)$

(g) Si $f \in C_0$ est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$ et si $f' \in L^1$, alors $F(f') = i\xi F(f)$

(h) Si $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\hat{f}(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$. } Calcul de résidus.

Théorème ~~d'Inversion~~ : Si $f \in L^1$, la transformée de Fourier de f est dans l'ensemble C_0 des fonctions continues convergeant vers 0 à l'infini et $\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

$$\boxed{\forall f \in L^1(\mathbb{R}) \qquad \hat{f} \in C_0 \quad \text{et} \quad \|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1}$$

Théorème d'Inversion : Si $f \in L^1$ et si $\hat{f} \in L^1$, alors $g(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} \hat{f}(t)\, dm(t)$ est dans C_0 et $f(x) = g(x)$ presque pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Ainsi :

$$\boxed{f \in L^1 \text{ et } \hat{f} \in L^1 \Rightarrow f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} \hat{f}(t)\, dm(t) \ \text{p.p.} x \in \mathbb{R}}$$

Corollaire : $f \in L^1$ et $\hat{f} = 0 \Rightarrow f = 0$ p.p. $x \in \mathbb{R}$. (Unicité)

II Transformée de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{R})$

$L^2(\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f\bar{g}\, dx$, de sorte que la théorie de Fourier est plus symétrique dans ce cas.

$L^1 \cap L^2$ est un sous-espace dense dans $L^2(\mathbb{R})$, et l'on peut définir $\hat{f} \in C_0$ pour toute fonction $f \in L^1 \cap L^2$. L'application $L^1 \cap L^2 \to C_0$, $f \mapsto \hat{f}$ ainsi définie a son image dans L^2, et est uniformément continue.

On peut donc la prolonger de manière unique en une application $F : L^2 \to L^2$ appelée transformée de Fourier sur L^2, ou encore "transformée de Plancherel".

<u>Théorème de Plancherel</u> : Il existe une application $F : L^2 \longrightarrow L^2$, $f \longmapsto F(f) = \hat{f}$ qui vérifie les propriétés :

(a) $\forall f \in L^1 \cap L^2$ $\hat{f}$ = transformée de Fourier de f (au sens du I)

(b) $\forall f \in L^2$ $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$

(c) F est une isométrie de L^2 sur L^2 (i.e. une application linéaire bijective qui conserve la norme de L^2 sur L^2)

(d) Il existe entre f et $\hat{f}$ les relations suivantes (qui ~~sont~~ forment en quelque sorte un théorème d'inversion pour la transformée de Fourier dans L^2) :

En posant $\varphi_A(\xi) = \int_{-A}^{A} e^{-i\xi x} f(x)\, dm(x)$ et $\psi_A(\xi) = \int_{-A}^{A} e^{i\xi x} \hat{f}(x)\, dm(x)$

on a : $\lim_{A\to+\infty} \|\hat{f} - \varphi_A\|_2 = 0$ et $\lim_{A\to+\infty} \|f - \psi_A\|_2 = 0$

<u>Formule de Parseval</u> : $\forall f, g \in L^2$ $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\bar{g}(x)\, dm(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(x)\,\overline{\hat{g}(x)}\, dm(x)$

<u>Corollaire du Th. de Plancherel (d)</u> :

$$\forall f \in L^2 \quad \forall \hat{f} \in L^1 \qquad f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)\, e^{ixt}\, dm(t) \quad p.p.\, x \in \mathbb{R}$$

Irrationalité de π et de e :

a) On considère le polynôme $P_n(x) = \dfrac{x^n(bx-a)^n}{n!}$ où $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$.

Mq pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)$ sont des entiers relatifs.

b) Mq la suite $I_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin x \, dx$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

c) En déduire que π n'est pas rationnel. (Ind. : supposer par l'absurde que $\pi = \frac{a}{b}$, puis montrer que I_n serait alors un entier non nul ...)

d) Prouver que e^r est irrationnel pour tout rationnel r

(Ind. : On peut considérer la suite $J_n = \int_0^r P_n(x) e^x \, dx$)

---

a) $$P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{k} C_k^p \underbrace{(x^n)^{(k-p)}}_{= n(n-1)\ldots(n-k+p+1)x^{n-k+p}} \underbrace{((bx-a)^n)^{(p)}}_{\to\, n(n-1)\ldots(n-p+1)(bx-a)^{n-p} \cdot b^p}$$

$$P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{k} C_k^p \, b^p \frac{n!}{(n-k+p)!} \cdot \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-k+p} (bx-a)^{n-p}$$

* Le terme constant est obtenu pour $p = k-n$ et si l'on suppose $0 \leq p = k-n \leq k$ $\Leftrightarrow n \leq k$. D'où la discussion :

- Si $k < n$, $P_n^{(k)}(0) = 0$
- Si $k \geq n$, $P_n^{(k)}(0) = C_k^{k-n} \, b^{k-n} \dfrac{n!}{(2n-k)!} (-a)^{2n-k}$

Ici $2n-k \leq n$ donc $\dfrac{n!}{(2n-k)!}$ et par suite $P_n^{(k)}(0)$ sont entiers.

NB : Si $k > 2n$, $P_n^{(k)}(x) \equiv 0$ car P_n est de degré $2n$ (!)

* • Si $k \geq n$, le seul terme de $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)$ non nul est obtenu pour $p = n$, d'où :

$$P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = C_k^n \, b^{k-n} \frac{n!}{(2n-k)!}$$

Ici $2n-k \leq n$ assure que $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z}$.

- Si $k < n$, $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)$ sera nul.

(réf. : ex. d'alg. ana. et proba. t2 de G. Lefort, Dunod, p267)

NB : Si $k > 2n$, $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) = 0$ puisque $P_n(x)$ est aussi un polynôme en $y = bx - a$ de degré $2n$ en y.

b) $$|I_n| \leq \int_0^\pi |P_n(x)|\, dx = \int_0^\pi \frac{|x(bx-a)|^n}{n!}\, dx \leq \frac{\pi . M^n}{n!}$$

où $M = \underset{x\in[0,\pi]}{\mathrm{Max}} |x(bx-a)|$ existe puisque $x \mapsto |x(bx-a)|$ est continue sur le compact $[0,\pi]$.

$\frac{M^n}{n!}$ tendant vers 0 pour n tendant vers $+\infty$, on déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

c) * Supposons par l'absurde que $\pi = \frac{a}{b}$ et montrons la propriété suivante par récurrence descendante sur $k \in \mathbb{N}$:

" $I_{n,k} = \int_0^\pi P_n^{(k)}(x) \sin x\, dx$ et $J_{n,k} = \int_0^\pi P_n^{(k)}(x) \cos x\, dx$ sont des entiers ".

- Si $k > 2n$, $P^{(k)}(x) \equiv 0$ et c'est trivial.
- Si $k = 2n$, $P^{(2n)}(x)$ est une constante donc $P^{(2n)}(x) = P^{(2n)}(0) \in \mathbb{Z}$ d'après le 1°/. $I_{n,k}$ et $J_{n,k}$ seront bien dans $\mathbb{Z}$ car du style $\int_0^\pi \text{cte} \sin x\, dx$.
- Si $0 \leq k < 2n$, et si la propriété est vraie pour $p > k$, on aura par intégration par parties :

$$I_{n,k} = \int_0^\pi P_n^{(k)}(x) \sin x\, dx = \underbrace{P_n^{(k)}(\pi)}_{= P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{Z}} + \underbrace{P_n^{(k)}(0)}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{\int_0^\pi P_n^{(k+1)}(x) \cos x\, dx}_{\in \mathbb{Z} \text{ (hyp. récurrente)}}$$

donc $I_{n,k} \in \mathbb{Z}$. (idem avec $J_{n,k}$)

CQFD

* Ainsi pour $k = 0$: $\boxed{I_n = \int_0^\pi P_n(x) \sin x\, dx \in \mathbb{Z}}$.

$P_n(x) = \frac{x^n(bx-a)^n}{n!}$ conserve un signe constant sur $[0,\pi]$ car $\pi = \frac{a}{b}$, tout comme $\sin x$.

$x \mapsto P_n(x) \sin x$ étant continue, I_n ne pourra s'annuler que si $P_n(x)\sin x$ est identiquement nulle sur $[0,\pi]$, ce qui est faux. Donc $\boxed{I_n \in \mathbb{Z}^*}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et I_n ne pourra pas tendre vers 0 ! C'est absurde.

d)

* Soit $r = \frac{a}{b}$. Supposons par l'absurde que $e^r \in \mathbb{Q}$ et notons $e^r = \frac{\alpha}{\beta}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*)$

On montre, comme au c), par récurrence descendante sur $k \in \mathbb{N}$ que :

" $\beta . J_{n,k} \doteq \beta \int_0^r P_n^{(k)}(x) . e^x \, dx \quad \in \mathbb{Z}$ "

preuve :

- C'est trivial si $k > 2n$ car $P_n^{(k)}(x) \equiv 0$
- Si $k = 2n$, $P_n^{(2n)}(x) \equiv P_n^{(2n)}(0) \in \mathbb{Z}$ d'où $\beta J_{n,2n} = \beta \int_0^r P_n^{2n}(0) e^x \, dx$

$= \beta P_n^{(2n)}(0) \left(\frac{\alpha}{\beta} - 1 \right) \in \mathbb{Z}$.

- Si c'est démontré pour tout $p > k$, au rang k :

$$\beta J_{n,k} = \beta \left[\left[P_n^{(k)}(x) e^x \right]_0^r - \int_0^r P_n^{(k+1)}(x) e^x \, dx \right]$$

$$= \beta \, (\underbrace{P_n^{(k)}(r)}_{\substack{\in \mathbb{Z} \\ \text{d'après a)}}} \underbrace{e^r}_{= \frac{\alpha}{\beta}} - \underbrace{P_n^{(k)}(0)}_{\in \mathbb{Z}}) - \underbrace{\beta J_{n,k+1}}_{\substack{\in \mathbb{Z} \\ \text{(hyp. réc.)}}}$$

donc $\beta . J_{n,k} \in \mathbb{Z}$.

CQFD

La majoration du b) montrerait encore que $\lim_{+\infty} J_n = 0$, et l'on vient de voir que (pour $k = 0$) : $\beta J_n \in \mathbb{Z}$. J_n ne pouvant pas être nul (car l'intégrand est de signe constant et continu sur $[0, r]$), c'est absurde.

.../...

NB : Autres solutions.

1) 2nde solution pour le a)

* Utilisons la formule du binôme :

$$P_n(x)=\frac{1}{n!}x^n\sum_{p=0}^{n}C_n^p\, b^p x^p(-a)^{n-p} = \frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}C_n^p(-a)^{n-p}.\, b^p\, x^{p+n} \qquad (*)$$

d'où $P_n^{(k)}(x)=\frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}C_n^p(-a)^{n-p}b^p\,(p+n)(p+n-1)\dots(p+n-k+1)\,x^{p+n-k}$

Le terme constant de $P_n^{(k)}$ s'obtient pour $p+n-k=0 \Leftrightarrow p=k-n$ sous réserve que $0\leq k-n\leq n$ ie $n\leq k\leq 2n$. D'où la discussion :

- Si $k<n$ ou $k>2n$, $P_n^{(k)}(0)=0$
- Si $n\leq k\leq 2n$, $P_n^{(k)}(0)=\frac{1}{n!}C_n^{k-n}(-a)^{2n-k}\,b^{k-n}\,k!$ sera bien entier car $\frac{k!}{n!}\in\mathbb{N}$.

* Une fois réglé le cas de $P_n^{(k)}(0)$, on passe à $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)$ en notant :

$$P_n(x)=\frac{x^n(bx-a)^n}{n!}=\frac{b^nx^n\left(x-\frac{a}{b}\right)^n}{n!}=\frac{b^n\left(y+\frac{a}{b}\right)^n y^n}{n!}=\frac{(by+a)^n y^n}{n!}$$

soit $P_n(x)=Q_n\left(x-\frac{a}{b}\right)$ avec $Q_n(y)\doteq\frac{(by+a)^n y^n}{n!}$

Le raisonnement précédent prouve que $Q_n^{(k)}(0)\in\mathbb{Z}$ pour tout k, et donc $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right)=Q_n^{(k)}(0)\in\mathbb{Z}$.

2) 3ème solution pour le a) :

On utilise la formule du binôme comme en (*) ci-dessus, et l'on compare avec la formule de Taylor à l'origine :

$$P_n(x)=\frac{1}{n!}\sum_{p=0}^{n}C_n^p(-a)^{n-p}b^p x^{p+n} = \sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{P_n^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

D'où immédiatement :

- $P_n^{(k)}(0)=0$ dès que $k<n$ ou $k>2n$.
- Si $n\leq k\leq 2n$, $\frac{P_n^{(k)}(0)}{k!}=C_n^{k-n}\frac{(-a)^{2n-k}b^{k-n}}{n!} \Rightarrow P_n^{k}(0)\in\mathbb{Z}$.

COPD

En utilisant une des formules de la moyenne, montrer qu'il existe 2 valeurs x_1 et x_2 dans $[0,1]$ telles que :

$$\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1+x^2} = \frac{2}{\pi(1+x_1^2)} = \frac{\pi}{4} \sin \pi x_2$$

---

* Rappel : Première formule de la moyenne.

f, g intégrables sur $[a,b]$

g gardant un signe constant sur $[a,b]$. On supposera $g \geq 0$ pour fixer les idées

$m = \operatorname{Inf}_{[a,b]} f$ et $M = \operatorname{Sup}_{[a,b]} f$.

Alors : $m \leq f \leq M \Rightarrow mg \leq fg \leq Mg \Rightarrow m\int_a^b g \leq \int_a^b fg \leq M\int_a^b g$

Ainsi, dès que $\int_a^b g \neq 0$, on a : $m \leq \dfrac{\int_a^b fg}{\int_a^b g} \leq M$.

En particulier, si f est continue, il existera(*) $c \in [a,b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{\int_a^b fg}{\int_a^b g}$$

((*) en effet, le Th. de Weierstrass stipule : f continue $\Rightarrow f([a,b]) = [m,M]$ où $m = \operatorname{Inf} f$ et $M = \operatorname{Sup} f$.)

ie : $$\boxed{\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g}$$

* Ici : $\dfrac{1}{1+x^2}$ reste toujours positive, donc en prenant $g = \dfrac{1}{1+x^2}$ et $f = \sin \pi x$, on obtient

$$\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1+x^2}dx = \sin \pi x_2 \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} \sin \pi x_2 \quad \text{(pour } x_2 \text{ convenable)}$$

$x \mapsto \sin \pi x$ reste positive pour $x \in [0,1]$, donc on peut intervertir les rôles de f et g pour obtenir :

$$\int_0^1 \frac{\sin \pi x}{1+x^2} = \frac{1}{1+x_1^2}\int_0^1 \sin \pi x = \frac{2}{\pi(1+x_1^2)} \quad \text{pour } x_1 \in [0,1] \text{ convenable.}$$

CQFD

(réf. TD Deug 1re année, 92-93) (et 93-94 avec le Rappel ci-dessus à prouver à la 1re question)

1) Au moyen des sommes de DARBOUX, mq

$$\frac{1}{n}\ln\frac{p}{n} \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} \ln x\,dx \leq \frac{1}{n}\ln\frac{p+1}{n} \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

2) En déduire $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n} \ln\frac{p}{n} = \int_0^1 \ln x\,dx$

3) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$

---

1) $\frac{1}{n}\ln\frac{p}{n}$ (resp. $\frac{1}{n}\ln\frac{p+1}{n}$) est une somme de Darboux inférieure (resp. supérieure) associée à $f(x)=\ln x$ sur $\left[\frac{p}{n}, \frac{p+1}{n}\right]$, puisque $\ln x$ est croissante.

2) On somme les inégalités du 1)

$$\frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n-1}\ln\frac{p}{n} \leq \sum_{p=1}^{n-1}\int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}}\ln x\,dx \leq \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n-1}\ln\frac{p+1}{n}$$

Posons $u_n = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{n}\ln\frac{p}{n}$, on obtient :

$$u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1}\ln x\,dx \leq u_n - \frac{1}{n}\ln\frac{1}{n} \qquad (*)$$

* $\int_0^1 \ln x\,dx$ est convergente car $\int_\varepsilon^1 \ln x\,dx = [x\ln x - x]_\varepsilon^1 = -1 - \varepsilon\ln\varepsilon + \varepsilon$ tend vers -1 quand $\varepsilon \to 0$. Donc :

$$\int_0^1 \ln x\,dx = -1$$

Ainsi $\int_{\frac{1}{n}}^{1}\ln x\,dx \longrightarrow \int_0^1 \ln x\,dx = -1 \quad (n\to+\infty)$

(réf. Deug 1-année 93-94, UAG, exam sept 89 et TD 93-94)

(*) peut s'écrire :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln x \, dx + \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} \leq u_n \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \ln x \, dx$$

et en faisant tendre n vers $+\infty$:

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \int_0^1 \ln x \, dx = -1$$

(Th. des gendarmes)

3) On a

$$u_n = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} \ln \frac{p}{n} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n} (\ln p - \ln n) = \frac{1}{n} \left(\ln n! - n \ln n \right)$$

$$= \frac{1}{n} \ln \left(\frac{n!}{n^n} \right)$$

$u_n \to -1$ entraîne $e^{u_n} \to e^{-1} = \frac{1}{e}$ $(n \to +\infty)$, et l'on calcule

$$e^{u_n} = \left(\frac{n!}{n^n} \right)^{1/n} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

CQFD

En utilisant les sommes de Riemann, déterminer $\lim_{n \to +\infty} S_n$ dans les cas suivants :

a) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2}$ b) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$

c) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2 \sqrt[3]{n^3+k^3}}$ d) $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n}$

---

a) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{n+k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2+kn}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1+\frac{k}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

où $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$

Donc $$\lim S_n = \int_0^1 \frac{1+x}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} + \int_0^1 \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

$$= \left[\operatorname{Arctan} x\right]_0^1 + \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1$$

$$\boxed{\lim S_n = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln 2}{2}}$$

b) $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = \underbrace{\frac{(n+1)^2}{n^2}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{n+1} \sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)}_{\to \int_0^1 x \sin \pi x \, dx}$$

Donc

$$\lim S_n = \int_0^1 x \sin \pi x \, dx = \left[x \cdot \frac{-\cos \pi x}{\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-\cos \pi x}{\pi}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin \pi x}{\pi}\right]_0^1$$

$$\boxed{\lim S_n = \frac{1}{\pi}}$$

(réf. Deug A 1-année 92-93)

c) $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2 \sqrt[3]{n^3+k^3}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\sqrt[3]{1+\left(\frac{k}{n}\right)^3}}$

$\lim S_n = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt[3]{1+x^3}} dx = \left[\frac{1}{3} \frac{(1+x^3)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}}\right]_0^1$

$$\boxed{\lim S_n = \frac{\sqrt[3]{4}-1}{2}}$$

d) $P_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$

$\ln P_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^1 \ln(1+t)\,dt = \left[(t+1)\ln(t+1)-t\right]_0^1$
$= 2\ln 2 - 1$

donc $P_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{2\ln 2-1} = \frac{4}{e}$

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{4}{e}}$$

Exercice 2 (5 pts)

Soit $x \in \mathbb{R}$, on pose $U_0(x) = \sin x$ et $U_{n+1}(x) = \int_0^x t\, U_n(t)\, dt$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

1 1°) Calculer, par x réel fixé, $U_1(x)$ et $U_2(x)$

1 2°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction réelle $x \to U_n(x)$ est impaire

1 3°) a) Etudier les variations de la fonction $U_1(x)$ pour $x \in \left[0\ \frac{3\pi}{2}\right]$

1 b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall x \in \left[0\ \frac{5\pi}{4}\right]$, $U_n(x) \geq 0$

(On pourra faire un raisonnement par récurrence)

1 4°) Etudier pour $n \in \mathbb{N}^*$, n fixé, les variations de la fonction réelle $x \to U_n(x)$ pour $x \in \left[0\ \frac{5\pi}{4}\right]$

---

1) $u_1(x) = \int_0^x t \sin t\, dt = [t(-\cos t)]_0^x - \int_0^x -\cos t\, dt$

$= \sin x - x\cos x$

$u_2(x) = \int_0^x t(\sin t - t\cos t)\, dt = u_1(x) - \int_0^x t^2 \cos t\, dt$

or $\int_0^x t^2\cos t\, dt = [t^2 \sin t]_0^x - \int_0^x 2t \sin t\, dt$ par int. par part.

$= x^2 \sin x - 2u_1(x)$

donc $u_2(x) = 3u_1(x) - x^2 \sin x$

$= 3\sin x - 3x\cos x - x^2 \sin x$

$= (3 - x^2)\sin x - 3x\cos x$

2) Récurrence. u_0 est impair, et si u_n l'est :

$u_{n+1}(-x) = \int_0^{-x} t\, u_n(t)\, dt = \int_0^x -v\, u_n(-v)(-dv) = -\int_0^x v\, u_n(v)\, dv$

$= u_{n+1}(x)$

(réf : ext. examen juin 93 en M12-Analyse, Deug A$_1$ - 1re année)
DEUG A

3) a) $u_1'(x) = x \sin x$ d'où le tableau de variations

x	0		π		$\frac{3\pi}{2}$
u_1'	0	$+$	0	$-$	
u_1	0	$\nearrow$	π	$\searrow$	-1

3) b) * $u_1\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{5\pi}{4} - 1\right) > 0$. Les variations de u_1 montrent que $u_1(x) \geq 0$ pour tout $x \in \left[0, \frac{5\pi}{4}\right]$ (et m̂ $u_1(x) > 0$ sur $\left]0, \frac{5\pi}{4}\right]$.

* Au rang $n+1$: si $u_n(t) \geq 0$ pour tout $t \in \left[0, \frac{5\pi}{4}\right]$, on aura $u_{n+1}(x) = \int_0^x t\, u_n(t)\, dt \geq 0$. La récurrence aboutit.

4) Comme $u_n'(x) = x\, u_{n-1}(x) > 0$ pour tout $x \in \left]0, \frac{5\pi}{4}\right]$, u_n sera strictement décroissante sur $\left[0, \frac{5\pi}{4}\right]$.

Une généralisation des sommes de Riemann

> Soit $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$.
> Mq $\lim\limits_{\substack{r\to+\infty \\ r\in\mathbb{R}}} \frac{b-a}{r} \sum\limits_{n=0}^{[r]} \psi\left(a+n\frac{b-a}{r}\right) = \int_a^b \psi(t)\,dt$

* Posons $\varphi(r) = \frac{b-a}{r}\sum\limits_{n=0}^{[r]} \psi\left(a+n\frac{b-a}{r}\right)$

ψ est intégrable sur $[a,b]$ car continue. La somme de Riemann $\frac{b-a}{m}\sum\limits_{n=0}^{m-1} \psi\left(a+n\frac{b-a}{m}\right)$ tend vers $I \doteq \int_a^b \psi(t)\,dt$ quand $m\to+\infty$.

Cela entraine que $\lim\limits_{\substack{m\to+\infty \\ m\in\mathbb{N}}} \frac{b-a}{m}\sum\limits_{n=0}^{m} \psi\left(a+n\frac{b-a}{m}\right) = I$

(En effet, $\frac{b-a}{m}\sum\limits_{n=0}^{m}\psi(\ ) = \frac{b-a}{m}\sum\limits_{n=0}^{m-1}\psi(\ ) + \frac{b-a}{m}\psi(b)$ et $\lim\limits_{m\to+\infty}\frac{-}{m}\psi(b) = 0$)

Comme $\varphi(m) = \frac{b-a}{m}\sum\limits_{n=0}^{m}\psi\left(a+n\frac{b-a}{m}\right)$, on a prouvé :

$$\boxed{\lim_{\substack{m\to+\infty \\ m\in\mathbb{N}}} \varphi(m) = I} \qquad (1)$$

* Prouver que $\lim\limits_{\substack{r\to+\infty \\ r\in\mathbb{R}}} \varphi(r) = I$ revient alors à montrer que

$$\lim_{r\to+\infty} |\varphi(r) - \varphi(m)| = 0 \qquad (2)$$

où $m = [r]$.

En effet, si (2) est vérifiée et si $\varepsilon > 0$ est donné, il existe $r_1 > 0$ tq

$$r > r_1 \Rightarrow |\varphi(r) - \varphi(m)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

et d'après (1), il existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tq

$$m > m_2 \Rightarrow |\varphi(m) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Si $m = [r]$, et pour $r > \mathrm{Sup}(r_1, m_2+1)$ on aura bien :

(réf. : vu au cours de la solution d'une question II.2.4 du CAPES 94.1 comp., AG26 - et adapté)

$$|\varphi(r) - I| \leq |\varphi(r) - \varphi(m)| + |\varphi(m) - I| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon . \quad \text{CQFD}$$

* Montrons (2) pour conclure : si $m = [r]$,

$$\varphi(r) - \varphi(m) = \frac{b-a}{r} \sum_{n=0}^{m} \psi\left(a+n\frac{b-a}{r}\right) - \frac{b-a}{m} \sum_{n=0}^{m} \psi\left(a+n\frac{b-a}{m}\right)$$

$$= \frac{b-a}{r}\left(\sum_{n=0}^{m} \psi\left(a+n\frac{b-a}{r}\right) - \psi\left(a+n\frac{b-a}{m}\right)\right) + \left(\frac{b-a}{r} - \frac{b-a}{m}\right) \sum_{n=0}^{m} \psi\left(a+n\frac{b-a}{m}\right)$$

$$|\varphi(r) - \varphi(m)| \leq \underbrace{\frac{b-a}{r} \sum_{n=0}^{m} \left|\psi\left(a+n\frac{b-a}{r}\right) - \psi\left(a+n\frac{b-a}{m}\right)\right|}_{A(r)} + \underbrace{\frac{|m-r|}{r} \cdot \frac{b-a}{m} \sum_{n=0}^{m} \left|\psi\left(a+n\frac{b-a}{m}\right)\right|}_{B(r)} \quad (3)$$

$\frac{|m-r|}{r} \leq \frac{1}{r}$ tend vers 0 quand $r \to +\infty$, et $\lim\limits_{\substack{m\to+\infty \\ m\in\mathbb{N}}} \frac{b-a}{m} \sum\limits_{n=0}^{m} \left|\psi\left(a+n\frac{b-a}{m}\right)\right| = \int_a^b |\psi(t)|\,dt$

de sorte que $\lim\limits_{r\to+\infty} B(r) = 0$. Donc, si $\varepsilon > 0$ est donné,

$$\exists r_1 > 0 \quad r > r_1 \Rightarrow B(r) \leq \varepsilon$$

ψ est continue sur $[a,b]$, donc uniformément continue sur $[a,b]$, et il existera $\eta > 0$ tq

$$\left|\left(a+n\frac{b-a}{r}\right) - \left(a+n\frac{b-a}{m}\right)\right| < \eta \Rightarrow \left|\psi\left(a+n\frac{b-a}{r}\right) - \psi\left(a+n\frac{b-a}{m}\right)\right| < \varepsilon$$

Comme $\left|\left(a+n\frac{b-a}{r}\right) - \left(a+n\frac{b-a}{m}\right)\right| = n(b-a)\left|\frac{1}{r} - \frac{1}{m}\right| = n(b-a)\frac{|m-r|}{mr}$

$$\leq m(b-a)\frac{1}{mr} = \frac{b-a}{r}$$

il suffira de prendre $r > \frac{b-a}{\eta}$ pour avoir $\left|\psi\left(a+n\frac{b-a}{r}\right) - \psi\left(a+n\frac{b-a}{m}\right)\right| < \varepsilon$

et par suite : $A(r) \leq \frac{b-a}{r} \cdot (m+1) \cdot \varepsilon \leq (b-a)\frac{r+1}{r}\varepsilon$

Finalement, si $r > \operatorname{Sup}\left(\frac{b-a}{\eta}, r_1\right)$, (3) entraîne :

$$|\varphi(r) - \varphi(m)| \leq (b-a)\frac{r+1}{r}\varepsilon + \varepsilon$$

Comme $\frac{r+1}{r} \leq 2$ pour $r \geq 1$, si $r > \operatorname{Sup}\left(\frac{b-a}{\eta}, r_1, 1\right)$ on aura

$$|\varphi(r) - \varphi(m)| \leq [2(b-a)+1]\,\varepsilon$$, ce qui prouve (2).

Intégration

(suite définie par une intégrale, convergence d'intég. généralisée convergence uniforme)

Chercher $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$

(ref. Lehning ?) (idée en Lehning V ex 11 p 23)

Comme $\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e^{x^2}} = e^{-x^2}$ $(n\to+\infty)$, on va montrer que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx = \ell$ où $\ell = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

Posons $f_n(x) = \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$.

① $f_n(x)$ tend uniformément vers $f(x) = e^{-x^2}$ pour $x\in[a,b]$ quand $n\to+\infty$.

Pour le voir, on peut soit appliquer le lemme A, soit le Th. de Dini ci-dessous (cf Lehning). On peut aussi donner une preuve directe en cherchant le Sup de la différence (cf Pro B2 page suiv.) :

lemme A : Si (f_n) est une suite de fcts dérivables sur $[a,b]$ et tendant simplement vers f, s'il existe $k\in\mathbb{R}$ tq $\forall x\in[a,b]$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $|f_n'(x)|\leq k$, alors $f_n\to f$ uniformément sur $[a,b]$.

Th. de Dini Soit (f_n) suite croissante de fcts de $[a,b]\to\mathbb{R}$ ~~positives~~ continues. Si f_n converge simplement sur $[a,b]$ et si la limite simple f est continue, alors $f_n\to f$ uniformément sur $[a,b]$. (preuve : cf Serfati III p 274)

Appliquons le lemme A : Si $f_n(x) = \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n}$, $f_n'(x) = -2x\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n-1}$

donc $|f_n'(x)| = \frac{2|x|}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} \leq 2|x| \leq 2.\mathrm{Sup}(|a|,|b|)$ pour tout $x\in[a,b]$.

(2) Posons $u_n = \int_0^n \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$

$$u_n = \underbrace{\int_0^A \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx}_{} + \underbrace{\int_A^n \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx}_{\xi}$$

$\downarrow n \to +\infty$ (car $f_n \to f$ uniformément sur $[0,A]$)

$$\int_0^A e^{-x^2} dx$$

On a $\xi \leq \int_A^{+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^n} dx \leq \int_A^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = [\text{Arctan}\, x]_A^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan}\, A$

↑ grâce au binôme

Comme $\lim_{A\to+\infty} \text{Arctan}\, A = \frac{\pi}{2}$, si ε donné, il existe A tq $\xi \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

d'où ~~$|u_n - \ell| \leq$~~

$$u_n - \ell = \underbrace{\int_0^A f_n(x)\,dx - \int_0^A e^{-x^2} dx}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\int_A^n f_n(x)\,dx}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\int_A^{+\infty} e^{-x^2} dx}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}}$$

dès que $n \geq N$ car $f_n \to f = e^{-x^2}$ unif. sur $[0,A]$ — pour A convenable

prouve que $\lim_{n\to+\infty} u_n - \ell = 0$ □

Proposition B : $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$ uniformément sur tout intervalle $[a,b]$. **PREUVE DIRECTE**

preuve : Posons $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ et $f(x) = e^x$. Posons $g(x) = e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = f(x) - f_n(x)$. On a : $g'(x) = e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}$ et un max. de la fonction $|g(x)|$ sur $[a,b]$ sera atteint soit à l'une des extrémités de $[a,b]$, soit en $x_0 \in]a,b[$ tq $g'(x_0)=0$, ie $e^{x_0} = \left(1+\frac{x_0}{n}\right)^{n-1}$. Donc :

$$\sup_{x\in[a,b]} |g(x)| \leq \sup\left(|g(a)|, |g(b)|, |g(x_0)|\right) \quad \text{où } x_0 \text{ tq } g'(x_0)=0$$

$$\leq \sup\left(\underbrace{\left|e^a - \left(1+\frac{a}{n}\right)^n\right|}_{\to 0}, \underbrace{\left|e^b - \left(1+\frac{b}{n}\right)^n\right|}_{\to 0}, \underbrace{\left|e^{x_0} - \left(1+\frac{x_0}{n}\right)^n\right|}_{\parallel}\right)$$

$\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ unif. en $x \in [a,b]$

$\frac{|x_0|}{n} e^{x_0} \leq \frac{C^{te}}{n}$ (Cte dépendant seulement de a et b) $\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ unif en $x \in [a,b]$. □

Posons $I_n = \frac{1}{2^{n+1}n!}\int_0^1 (1-t)^n e^{\frac{t}{2}}\,dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $I_n = I_{n-1} + \frac{1}{2^n n!}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$

b) Prouver qu'alors : $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sqrt{e} = 1 - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1!} - \dots - \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n!} + I_n$

c) Montrer que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n n!}$ et en déduire $\lim_{n\to+\infty}\left(1 - \dots - \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n!}\right)$.

---

a) Par intégration par parties :

$$I_n = \frac{1}{2^{n+1}n!}\underbrace{\int_0^1 (1-t)^n e^{t/2}\,dt}_{\underbrace{\left[(1-t)^n\, 2e^{\frac{t}{2}}\right]_0^1}_{2} + \underbrace{\int_0^1 n(1-t)^{n-1}\cdot 2e^{\frac{t}{2}}\,dt}_{2n\int_0^1 (1-t)^{n-1}e^{\frac{t}{2}}\,dt}}$$

$$I_n = \frac{1}{2^n n!} + \underbrace{\frac{1}{2^n (n-1)!}\int_0^1 (1-t)^{n-1}e^{\frac{t}{2}}\,dt}_{I_{n-1}} \qquad \text{oui}$$

b) $I_n = I_{n-1} + \frac{1}{2^n n!} = I_{n-2} + \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} + \frac{1}{2^n n!}$

$= \dots = I_0 + \frac{1}{2\times 1!} + \dots + \frac{1}{2^n . n!}$ où $I_0 = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{t/2}\,dt = \sqrt{e} - 1$

Soit $\sqrt{e} = 1 - \frac{1}{2.1!} - \dots - \frac{1}{2^n . n!} + I_n$

c) Facilement, $0 \leq (1-t)^n e^{t/2} \leq e^{t/2} \Rightarrow 0 \leq \int_0^1 (1-t)^n e^{t/2}\,dt \leq 2(\sqrt{e}-1) \leq 2$

d'où $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2^n n!} \Rightarrow \lim\left(1 - \dots - \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{n!}\right) = \sqrt{e}$.

Soit la fonction $f(x) = \ln x$. Soit σ la subdivision de l'intervalle $[1,n]$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) de pas constant égal à 1.

1°/ Écrire les sommes de Darboux supérieure et inférieure $S^n(f)$ et $s^n(f)$ de f associée à σ.

2°/ En déduire $(n-1)! \leq n^n e^{-n+1} \leq n!$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

1°/ f est croissante, donc $S^n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \ln(i+1) = \ln n!$

et $s^n(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \ln(i) = \ln(n-1)!$

2°/ On sait que l'intégrale de f est la borne inférieure (resp. sup.) de l'ensemble des sommes de Darboux supérieures (resp. inférieures), donc 1°/ permet d'écrire :

$$\ln(n-1)! \leq \int_1^n \ln x \, dx \leq \ln n!$$

$$\ln(n-1)! \leq [x \ln x - x]_1^n \leq \ln n!$$

$$\ln(n-1)! \leq n \ln n - n + 1 \leq \ln n!$$

$$(n-1)! \leq n^n . e^{1-n} \leq n!$$

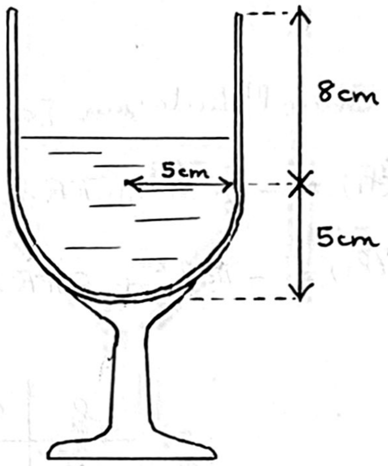
CQFD

(Deug 1re année, examen juin 94)

Une coupe a la forme d'une demi-sphère de rayon 5 cm surmontée d'un cylindre de révolution de hauteur 8 cm (figure ci-contre)

1) Quelle est l'expression du volume $V(h)$ de liquide contenu dans cette coupe en fonction de la hauteur h de ce liquide ?

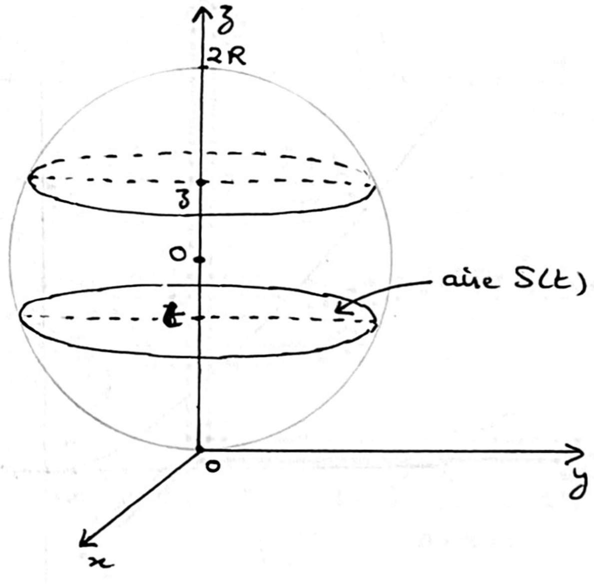
2) Etudier et représenter graphiquement la fonction $V(h)$ quand h varie de 0 à 13 cm.



1) Cherchons d'abord le volume délimité par une sphère et un plan coupant cette sphère :

Sphère de rayon R

$V(z)$ = volume de la sphère sous la côte z



Nous avons affaire à un solide de révolution, et nous savons que :

$$V(z) = \int_0^z S(t)\,dt$$

où $S(t)$ est la surface du disque obtenu en coupant la sphère avec un plan horizontal d'équation $z = t$.

$$S(t) = \sqrt{R^2 - (R-t)^2}$$

donc :

$$V(z) = \pi \int_0^z R^2 - (R-t)^2\,dt = \pi \int_0^z -t^2 + 2Rt\,dt = \pi\left(-\frac{z^3}{3} + Rz^2\right)$$

$$\boxed{V(z) = \pi z^2\left(R - \frac{z}{3}\right)}$$

Q2 : Si $0 \leq h \leq 2R$, $V(h) = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)$

Si $h \geq 2R$, $V(h) = \frac{4}{3}\pi R^3 + \pi R^2 (h - 2R)$ [illegible]

3) Étude l'étude sur $[0, 2R]$ [illegible]

$V(h) = -\frac{\pi}{3} h^3 + \pi R h^2$

$V'(h) = -\pi h^2 + 2\pi R h = \pi h(-h + 2R)$ s'annule en $h = 0$ ou $h = 2R$

h	0		$2R$
V'	0	$+$	
V	0	↗	[illegible]

4) Représentation graphique :

Énoncé : Calculer l'intégrale $\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$ où $x \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$.

En déduire $n^{x+1} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{n+k+1} C_n^k$

Solution :

* En posant $u = \frac{t}{n}$, on obtient : $\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = n^{x+1} \underbrace{\int_0^1 u^x (1-u)^n du}_{I_n}$

$$(u^x(1-u)^n)' = x u^{x-1}(1-u)^n - u^x n (1-u)^{n-1}$$
$$= (x+n) u^{x-1} (1-u)^n - n u^{x-1} (1-u)^{n-1}$$

d'où, par intégration par parties :

$$I_n = \underbrace{\left[u . u^x (1-u)^n\right]_0^1}_{=0} - \int_0^1 (x+n) u^x (1-u)^n - n u^x (1-u)^{n-1} du$$

$$I_n = n I_{n-1} - (x+n) I_n$$

$$I_n = \frac{n}{x+n+1} I_{n-1}$$

$$= \frac{n}{x+n+1} \times \frac{n-1}{x+n} \times \cdots \times \frac{1}{x+2} I_0 \quad \text{où } I_0 = \int_0^1 u^x dx = \frac{1}{x+1}$$

$$I_n = \frac{n!}{(x+n+1)\cdots(x+1)}$$

Ainsi : $\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = \frac{n^{x+1} . n!}{(x+n+1)\cdots(x+1)}$ ‖

* Comme $\int_0^n t^x\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{C_n^k (-1)^k}{n^k} \int_0^n t^{x+k} dt = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{C_n^k}{n+k+1} n^{x+1}$

on peut conclure !

Théorème de Beppo-Lévi

" Si $(f_n)_{n\geq 1}$ est une suite monotone de fonctions intégrables dans $(X, \mathcal{A}, \mu)$, notons $f = \lim_{+\infty} f_n$. Alors $f \in L^1(\mu) \Leftrightarrow \lim_{+\infty} \int f_n d\mu < \infty$, et dans ce cas on a : $\int_X f_n d\mu \longrightarrow \int_X f d\mu$ "

C'est une application directe du théorème de convergence monotone* de Lebesgue. Envisageons 2 cas :

1) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ est croissante, posons $g_n = f_n - f_1$. On définit une suite $(g_n)_{n\geq 1}$ de fonctions mesurables positives, croissante. D'après le th. de cv monotone :

$$\lim_{+\infty} \int_X f_n - f_1 = \int_X f - f_1$$

$$\lim_{+\infty} \int_X f_n - \int_X f_1 = \int_X f - f_1 \quad (1)$$

Si $f \in L^1(\mu)$, $(1) \Rightarrow \lim_{+\infty} \int_X f_n = \int_X f < \infty$. Inversement, si $\lim_{+\infty} \int f_n < \infty$ on aura $\int_X f - f_1 < \infty$, d'où $f - f_1 \in L^1(\mu)$. Comme $L^1(\mu)$ est un espace vectoriel et que $f_1 \in L^1(\mu)$, on en déduit que $f \in L^1(\mu)$.

CQFD

2) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ est décroissante, on considère $f'_n = -f_n$ suite croissante de fonctions intégrables, et l'on recommence le 1).

---

*Plus rapide : 1) Si $(f_n)_{n\geq 1}$ croissante, posons $g_n = f_n - f_1$. (g_n) est une suite croissante de fonctions positives mesurables. Le Th. de cv. monotone montre que $\lim g_n = \lim f_n - f_1$, donc $\lim f_n$, est mesurable et que :

$$\lim_{+\infty} \int_X f_n - f_1 \, d\mu = \int_X (\lim f_n) - f_1 \, d\mu$$

Comme $f_1 \in L^1$, $\int f_1 < \infty$ donc : $\lim \int_X f_n d\mu = \int_X (\lim f_n) d\mu$.

L'énoncé s'en déduit.

2) Si (f_n) décroissante, on prends $g_n = -f_n + f_1$

Soit f une fonction bornée et intégrable sur $[a,b]$. $S_a^b(f,X)$ et $\mathcal{I}_a^b(f,X)$ désignent respectivement les sommes de DARBOUX supérieures et inférieures relatives à une subdivision X de $[a,b]$.

1) Montrer : $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall X \qquad S_a^b(\lambda f, X) = \lambda S_a^b(f,X)$
et $\mathcal{I}_a^b(\lambda f, X) = \lambda \mathcal{I}_a^b(f,X)$.

2) En déduire que λf est intégrable pour tout λ positif.

3) Mq $\quad \forall \lambda > 0 \qquad \int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$

4) Traiter le cas où $\lambda < 0$.

---

1) X = subdivision $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

$$S(f,X) = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{x \in]x_i, x_{i+1}[} f(x)\,(x_{i+1} - x_i)$$

$$S(\lambda f, X) = \sum_{i=0}^{n-1} \sup_{]x_i,x_{i+1}[} (\lambda f(x))\,(x_{i+1} - x_i) = \lambda\, S(f,X)$$

puisque $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ entraine $\operatorname{Sup} \lambda A = \lambda \operatorname{Sup} A$ dès que $A \neq \emptyset$ et $A \subset \mathbb{R}$
(preuve : $\forall a \in A \quad \lambda a \leq \lambda . \operatorname{Sup} A$ donc $\lambda \operatorname{Sup} A$ majore λA. Si m majore λA, $\forall a \in A \quad \lambda a \leq m \Rightarrow \forall a \in A \quad a \leq \frac{m}{\lambda} \Rightarrow \operatorname{Sup} A \leq \frac{m}{\lambda} \Rightarrow \lambda \operatorname{Sup} A \leq m$,
donc $\lambda \operatorname{Sup} A$ est bien le plus petit des majorants de λA, ie la borne sup. de λA)

De même $\mathcal{I}(\lambda f, X) = \lambda \mathcal{I}(f,X)$

2) f intégrable $\Leftrightarrow \inf_X S(f,X) = \sup_X \mathcal{I}(f,X)$

$\Leftrightarrow \inf_X \lambda S(f,X) = \sup_X \lambda \mathcal{I}(f,X)$

$\Leftrightarrow \inf_X S(\lambda f, X) = \sup_X \mathcal{I}(\lambda f, X)$

$\Leftrightarrow \lambda f$ intégrable

(réf. Deug A1 année 92-93)

3) De plus $\int_a^b f \doteq \operatorname{Inf}_X S(f,X)$

Donc $\lambda \int_a^b f = \lambda \operatorname{Inf}_X S(f,X) = \operatorname{Inf}_X \lambda S(f,X) = \operatorname{Inf}_X S(\lambda f,X) = \int_a^b \lambda f$

4) Le cas où $\lambda < 0$ est similaire avec le seul chgt :

$$S(\lambda f,X) = \lambda \mathcal{S}(f,X)$$
$$\mathcal{S}(\lambda f,X) = \lambda S(f,X)$$

En effet : $S(\lambda f,X) = \sum_i \operatorname{Sup}_{]x_i,x_{i+1}[} (\lambda f(x))\,(x_{i+1}-x_i) = \sum \lambda \operatorname{Inf} f(x)\,(x_{i+1}-x_i)$

$= \lambda \mathcal{S}(f,X)$

provient alors de :

Lemme : Si $A \neq \emptyset$, $A \subset \mathbb{R}$ et si $\lambda < 0$, alors

$$\operatorname{Sup} \lambda A = \lambda \operatorname{Inf} A \quad \text{et} \quad \operatorname{Inf} \lambda A = \lambda \operatorname{Sup} A$$

preuve : $\forall a \in A$ $\operatorname{Inf} A \leq a \Rightarrow \lambda \operatorname{Inf} A \geq \lambda a$ donc $\lambda \operatorname{Inf} A$ majore λA.
Montrons que $\lambda \operatorname{Inf} A$ est le plus petit des majorants de λA : si m majore λA, on a : $\forall a \in A$ $\lambda a \leq m$ donc $\forall a \in A$ $a \geq \frac{m}{\lambda}$, donc $\operatorname{Inf} A \geq \frac{m}{\lambda}$
et $m \geq \lambda \operatorname{Inf} A$ CQFD

Alors 2) se modifie légèrement :

f intégrable $\Leftrightarrow \operatorname{Inf}_X S(f,X) = \operatorname{Sup}_X \mathcal{S}(f,X) \Leftrightarrow \lambda \operatorname{Inf}_X S(f,X) = \lambda \operatorname{Sup}_X \mathcal{S}(f,X)$

$\Leftrightarrow \operatorname{Sup}_X \lambda S(f,X) = \operatorname{Inf}_X \lambda \mathcal{S}(f,X)$

$\Leftrightarrow \operatorname{Sup}_X \mathcal{S}(\lambda f,X) = \operatorname{Inf}_X S(\lambda f,X)$

$\Leftrightarrow \lambda f$ intégrable

et $\lambda \int_a^b f \doteq \lambda \operatorname{Sup}_X \mathcal{S}(f,X) = \operatorname{Inf}_X \lambda \mathcal{S}(f,X) = \operatorname{Inf}_X S(\lambda f,X) = \int_a^b \lambda f$

sans modification.

CQFD

On considère la fonction f définie de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable et à dérivée intégrable.

Soient $$S'_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) f'\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

et $$S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+(k-1)\frac{b-a}{n}\right) f'\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

Calculer $\lim_{n\to+\infty}(S_n - S'_n)$. En déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

* On a $\lim S'_n = \int_a^b ff' = \left[\frac{f^2(x)}{2}\right]_a^b = \frac{f(b)^2 - f(a)^2}{2}$

Si l'on prouve que $\lim (S_n - S'_n) = 0$, alors $\lim S_n = \lim S'_n = \frac{f(b)^2 - f(a)^2}{2}$.

* Montrons que $\lim (S_n - S'_n) = 0$:

1° solution :

$$S_n - S'_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(a+(k-1)\frac{b-a}{n}\right) - f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right).f'\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

f est continue sur $[a,b]$, donc uniformément continue sur $[a,b]$ et :

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists N \quad n>N \Rightarrow \left|f\left(a+(k-1)\frac{b-a}{n}\right) - f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leq \varepsilon$

d'où :

$$|S_n - S'_n| \leq \frac{b-a}{n}.\varepsilon.\sum_{k=1}^{n}\left|f'\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right|$$

$|f'|$ étant intégrable, il existe M tq $n>M \Rightarrow \frac{b-a}{n}\sum\left|f'\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leq \int_a^b |f'| + \varepsilon$, d'où :

$$|S_n - S'_n| \leq \varepsilon\left(\int_a^b |f'| + \varepsilon\right)$$

Ce qui prouve que $\lim (S_n - S'_n) = 0$ (puisque pour tout $\varepsilon'>0$ on peut trouver $\varepsilon>0$ tel que $\varepsilon\left(\int_a^b |f'| + \varepsilon\right) \leq \varepsilon'$)

(réf. Deug A 1° année 92-93)

2° solution :

$$S_n - S'_n = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[f\left(a+(k-1)\frac{b-a}{n}\right) - f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \right] . f'\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right)$$

Le Th. des Acc. Finis montre que $\left| f\left(a+(k-1)\frac{b-a}{n}\right) - f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \right| \leq M . \frac{b-a}{n}$ où $M = \sup_{c\in]a,b[} |f'(c)|$, donc :

$$|S_n - S'_n| \leq \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 M \sum_{k=1}^{n} \left|f'\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right|$$

$|f'|$ étant intégrable, $\lim \frac{b-a}{n} \sum \left|f'\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right| = \int_a^b |f'|$, donc :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad n > N \Rightarrow \quad \frac{b-a}{n} \sum \left|f'\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)\right| \leq \int_a^b |f'| + \varepsilon$$

On en déduit :

$$|S_n - S'_n| \leq \frac{b-a}{n} M \left(\int_a^b |f'| + \varepsilon \right)$$

et il suffit de faire tendre n vers $+\infty$ dans cette inégalité.

On considère une fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et continue, et la fct g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \int_a^b f(x+t)\cos t\, dt$.
A l'aide du chgt de variable $x+t=u$, montrer que g admet une dérivée continue sur $\mathbb{R}$

$$g(x) = \int_a^b f(x+t)\cos t\, dt = \int_{a+x}^{b+x} f(u)\cos(u-x)\, du$$

1-méthode :

$$g(x) = \cos x \int_{a+x}^{b+x} f(u)\cos u\, du + \sin x \int_{a+x}^{b+x} f(u)\sin u\, du$$

Les fcts f, $\cos u$, $\sin u$ étant continues, on a :

$$g'(x) = -\sin x \int_{a+x}^{b+x} f(u)\cos u\, du + \cos x \int_{a+x}^{b+x} f(u)\sin u\, du + \cos x\, f(b+x)\cos(b+x)$$

$$- \cos x . f(a+x)\cos(a+x) + \sin x\, f(b+x)\sin(b+x) - \sin x . f(a+x)\sin(a+x)$$

$$g'(x) = -\sin x \int_{a+x}^{b+x} f(u)\cos u\, du + \cos x \int_{a+x}^{b+x} f(u)\sin u\, du + f(b+x)\cos b - f(a+x)\cos a$$

2-méthode :

$g(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t,x)\, dt$ est dérivable si α et β le sont, si $f(t,x)$ est continue, admet une dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ et si cette dérivée partielle est continue. C'est le cas ici. Et :

$$g'(x) = f(\beta(x),x).\beta'(x) - f(\alpha(x),x).\alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\, dt.$$

Ici :

$$g'(x) = f(b+x)\cos b - f(a+x)\cos a + \int_{a+x}^{b+x} f(u)\sin(u-x)\, du.$$

On considère une fonction f définie de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, continue, positive et telle que $M = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$.

Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left[\int_a^b [f(x)]^n \, dx \right]^{\frac{1}{n}} = M$

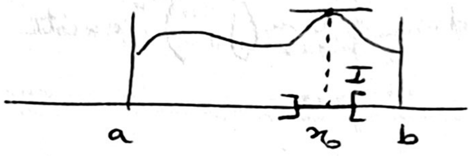
$*$ $0 \leq f(x) \leq M \Rightarrow 0 \leq f(x)^n \leq M^n \Rightarrow 0 \leq \int_a^b f(x)^n dx \leq M^n(b-a)$

donc $\quad 0 \leq \left(\int_a^b f^n\right)^{1/n} \leq M(b-a)^{1/n} \qquad (1)$

$*$ Comme f est continue, $M = \sup f(x) = f(x_0)$ où $x_0 \in [a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $M - \varepsilon > 0$. Il existe un intervalle I de longueur ℓ contenant x_0 tel que :

$\forall x \in I \qquad f(x) \geq M - \varepsilon$

Alors : $\quad \forall x \in I \quad (M-\varepsilon)^n \leq f(x)^n$



Et en intégrant : $\quad \ell(M-\varepsilon)^n \leq \int_I f(x)^n dx \leq \int_a^b f(x)^n dx$

$$\ell^{1/n}(M-\varepsilon) \leq \left(\int_a^b f^n\right)^{1/n} \qquad (2)$$

$*$ (1) et (2) donnent, si $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ est fixé à l'avance :

$$\exists \ell \quad \forall n \quad \underbrace{\ell^{1/n}(M-\varepsilon)}_{\substack{\to M-\varepsilon \\ (n\to+\infty)}} \leq \left(\int f^n\right)^{1/n} \leq \underbrace{M(b-a)^{1/n}}_{\substack{\to M \\ (n\to+\infty)}}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell^{1/n}(M-\varepsilon) = M-\varepsilon$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} M(b-a)^{1/n}$, si l'on se donne $\varepsilon' > 0$, il existera N tel que :

$$n > N \Rightarrow M-\varepsilon-\varepsilon' \leq \ell^{1/n}(M-\varepsilon) \leq \left(\int f^n\right)^{1/n} \leq M(b-a)^{1/n} \leq M+\varepsilon'$$

donc :

$$\forall \varepsilon \quad \forall \varepsilon' \quad \exists N \qquad n > N \Rightarrow \left|\left(\int f^n\right)^{1/n} - M\right| \leq \varepsilon + \varepsilon'$$

ce qui prouve que $\lim \left(\int f^n\right)^{1/n} = M$.

.../...

2-solution :

On montre (1) et (2) comme préc., ie :

$$\ell^{1/n}(M-\varepsilon) \leq \left(\int f^n\right)^{1/n} \leq M(b-a)^{1/n}$$

d'où l'on déduit :

$$M-\varepsilon \leq \underline{\lim}\left(\int f^n\right)^{1/n} \leq \overline{\lim}\left(\int f^n\right)^{1/n} \leq M$$

Cela ayant lieu pour tout $\varepsilon>0$, on aura :

$$\underline{\lim}\left(\int f^n\right)^{1/n} = \overline{\lim}\left(\int f^n\right)^{1/n} = M$$

donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int f^n\right)^{1/n}$ existe et n'est autre que M.

Montrer que $\lim_{n \to +\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\, dx = 0$

Il suffit d'écrire

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{\sin nx}{x^2+n^2}\, dx \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{n^2}\, dx = \frac{2\pi}{n^2}$$

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f définie par

$$f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$$

* Cette intégrale est définie si $x \neq 0$ et si $1+t^3 > 0$ pour tout t entre $\frac{1}{x}$ et x^2, ie $t > -1$ pour tout t entre $\frac{1}{x}$ et x^2, ie : $-1 < \text{Inf}\left(\frac{1}{x}, x^2\right)$ (*)

1er cas : $x < 0$, alors (*) $\Leftrightarrow -1 < \frac{1}{x} \Leftrightarrow$ $\boxed{x < -1}$

2e cas : $x > 0$, alors (*) est trivial car $\frac{1}{x} > 0$ et $x^2 > 0$.

f est donc définie sur $]-\infty, -1] \cup \mathbb{R}_+^*$.

* Cas où $x = -1$: $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$

$x = t+1$

$1+t^3 = (1+t)(t^2-t+1)$

$= x\,(x^2-3x+3)$

d'où $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}} = \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x(x^2-3x+3)}}$

Cette intégrale converge car $\frac{1}{\sqrt{x(x^2-3x+3)}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{3\sqrt{x}}$ et $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ converge.

* Cas où $x = 0$: $\int_{+\infty}^{0} \frac{dt}{\sqrt{1+t^3}}$ convergera car $\frac{1}{\sqrt{1+t^3}} \leq \frac{1}{t^{3/2}}$ et $\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{3/2}}$ converge.

Ccl : L'ens. de déf. de f est $]-\infty, -1] \cup \mathbb{R}_+$.

(réf. Deug A 1re année 92-93)

Soit $\varphi(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-x\xi}}{1+\xi}\, d\xi$ où $x \in \mathbb{R}_+^*$

1) Mq φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.

2) Vérifier que φ est la solution de l'équation diff. d'Euler :

$$y' - y = -\frac{1}{x} \qquad \text{où } x \in \mathbb{R}_+^*$$

s'annulant à l'infini.

3) Mq le développement asymptotique de φ en $+\infty$ est

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{k!}{x^{k+1}} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

---

1) * $(x,\xi) \mapsto \frac{e^{-x\xi}}{1+\xi}$ est continue, dérivable /à x, de dérivée partielle $(x,\xi) \mapsto \frac{-\xi e^{-x\xi}}{1+\xi}$ continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+$.

* $\int_0^\infty \frac{e^{-x\xi}}{1+\xi}\, d\xi$ est une intégrale convergente (pour tout $x>0$) puisque $e^{-x\xi} \leq \frac{M}{\xi}$ pour ξ suffisamment grand, et $\int_0^\infty \frac{M}{\xi(1+\xi)}\, d\xi$ converge.

* $\int_0^\infty \frac{-\xi e^{-x\xi}}{1+\xi}\, d\xi$ est uniformément convergente pour $x \in [A,+\infty[$

puisqu'alors : $\left|\frac{-\xi e^{-x\xi}}{1+\xi}\right| \leq \frac{\xi}{1+\xi} e^{-A\xi}$ et $e^{-A\xi} = o\left(\frac{1}{\xi^2}\right)$

soit $\left|\frac{-\xi e^{-x\xi}}{1+\xi}\right| \leq M \cdot \frac{\xi}{1+\xi} \cdot \frac{1}{\xi^2}$ pour ξ grand

$\leq M \frac{1}{\xi(1+\xi)}$ et $\int_0^\infty \frac{1}{\xi(1+\xi)}\, d\xi$ converge.

La convergence normale de $\int_0^\infty \frac{-\xi e^{-x\xi}}{1+\xi}\, d\xi$ est assurée sur $[A,+\infty[$, donc sa convergence uniforme.

Ccl : (Th. de dérivation sous le signe somme pour une intégrale généralisée)

φ est dérivable sur $[A,+\infty[$ $\forall A>0$, donc sur $]0,+\infty[$,

et : $\varphi'(x) = \int_0^\infty \frac{-\xi e^{-x\xi}}{1+\xi}\, d\xi$.

2) $$\varphi'-\varphi = \int_0^\infty \frac{(-\xi-1)e^{-x\xi}}{1+\xi}\,d\xi = -\int_0^\infty e^{-x\xi}d\xi = \left[\frac{e^{-x\xi}}{x}\right]_0^\infty = -\frac{1}{x}$$

pour $x>0$.

De plus : $|\varphi(x)| \leq \int_0^\infty \frac{e^{-x\xi}}{1+\xi}\,dx \leq \int_0^\infty e^{-x\xi}\,dx = \frac{1}{x}$ montre que $\lim_{x\to+\infty}\varphi=0$

φ est donc une solution de $y'-y=-\frac{1}{x}$ s'annulant à l'infini. Elle est unique car 2 sol. φ et ψ s'annulant à l'infini vérifieraient :

$$\varphi-\psi = k e^{x} \implies k=0.$$

3) $$\varphi(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-x\xi}}{1+\xi}\,d\xi$$

$$= \int_0^\infty e^{-x\xi}\left(1-\xi+\dots+(-1)^n\xi^n + \frac{(-1)^{n+1}\xi^{n+1}}{1+\xi}\right)d\xi$$

$$= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \underbrace{\int_0^\infty e^{-x\xi}.\,\xi^k\,d\xi}_{I_k} + \underbrace{(-1)^{n+1}\int_0^\infty \frac{e^{-x\xi}.\,\xi^{n+1}}{1+\xi}\,d\xi}_{R_{n+1}(x)}$$

Par int. par parties : $I_k = \frac{k}{x}I_{k-1} = \dots = \frac{k!}{x^k}I_0 = \frac{k!}{x^{k+1}}$

Donc :

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{k!}{x^{k+1}} + R_{n+1}(x) \qquad (*)$$

avec $|R_{n+1}(x)| \leq \int_0^\infty e^{-x\xi}\xi^{n+1}\,d\xi = \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}$ soit $R_{n+1}(x) = o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)$

(*) est bien un développement asymptotique de $\varphi(x)$ au voisinage de $+\infty$.

Montrer que si $\int_X |f| \, d\mu < \infty$, alors f est finie p.p.

En d'autres termes, si $f \in L^1(X)$ alors f est finie presque partout. Soit $A = \{x \in X \,/\, |f(x)| = \infty\}$. A est mesurable puisque $x \mapsto |f(x)|$ est une application mesurable de X sur $\overline{\mathbb{R}}$ (comme composée d'une fct mesurable avec une fct continue) et que $\{\infty\}$ est un fermé de $\overline{\mathbb{R}}$;

On a
$$\int_X |f| \, d\mu = M < \infty$$

$$\int_X |f| \, d\mu = \int_A |f| \, d\mu + \int_{\complement_X^A} |f| \, d\mu \geq \int_A |f| \, d\mu \qquad (1)$$

Retournons à la définition de $\int_A |f| \, d\mu$, pour une fct positive $|f|$ quelc. :
$$\int_A |f| \, d\mu = \sup_{0 \leq s \leq |f|} \int_A s \, d\mu$$

où s est une fct étagée, mesurable, telle que $s \leq |f|$.

Ici, $|f| = \infty$ sur A, donc s définie par $\begin{cases} s(x) = n & \forall x \in A \\ s(x) = 0 & x \notin A \end{cases}$ est étagée, mesurable et telle que $s \leq |f|$.

D'où
$$\int_A |f| \, d\mu \geq \int_A s_n \, d\mu = n \, \mu(A)$$

Par suite, compte tenu de (1)
$$\frac{M}{n} \geq \mu(A) \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient : $\mu(A) = 0$.

CQFD

<u>exercice</u> : Soit $f \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ où μ est une mesure positive. Si $f(x) \geq 0$ $\forall x \in X$ et si $\exists B \in \mathcal{A}$ $\mu(B) \neq 0$ et $\forall x \in B$ $f(x) > 0$, on a $\int_X f(x)\, d\mu > 0$.

Solution : Le fait que f soit intégrable importe peu : mesurable suffit dans la théorie abstraite et pour les fonctions positives.
La propriété énoncée est la contraposée de :

$$\left.\begin{array}{l} f \text{ mesurable } \geq 0 \\ \int_B f\, d\mu = 0 \quad \forall B \in \mathcal{A} \end{array}\right\} \Rightarrow f = 0 \text{ p.p} \qquad (P)$$

~~Coi l'on ajoute~~ f

(P) est montrée sur le Rudin, ~~et~~ . Voici comment :

Soit $E_n = \{x \in X \,/\, f(x) \geq \frac{1}{n}\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$. E_n est mesurable et $\int_{E_n} f\, d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(E_n) \Rightarrow \mu(E_n) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

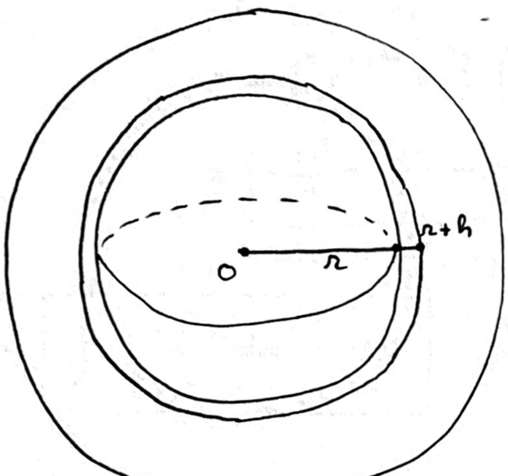
d'où $\mu(E) = \lim_{n \to +\infty} \mu(E_n) = 0$ où $E = \bigcup E_n = \{x \,/\, f(x) > 0\}$

et compte tenu de la remarque $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$

CQFD

Calculer la masse d'une boule de rayon R, dont la densité varie en fonction de la distance selon l'expression :

$$f(r) = ar + b \qquad r \in [0, R].$$



Notons :
$V(r)$ le volume de la boule de rayon r
$M(r)$ la masse " "

Soit $h > 0$, petit. f étant une fct croissante de r, on aura :

$$(V(r+h)-V(r)).f(r) \leq M(r+h)-M(r) \leq (V(r+h)-V(r))\, f(r+h)$$

Comme $V(r+h)-V(r) = \frac{4}{3}\pi(r+h)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(h^3+3r^2h+3rh^2)$, on aura :

$$\underbrace{\frac{4}{3}\pi\,\frac{h^3+3r^2h+3rh^2}{h}\,f(r)}_{\to \frac{4}{3}\pi.3r^2 f(r)} \leq \frac{M(r+h)-M(r)}{h} \leq \underbrace{\frac{4}{3}\pi\,\frac{(h^3+3r^2h+3rh^2)}{h}\,f(r+h)}_{\to \frac{4}{3}\pi.3r^2 f(r)}$$

$(h \to 0)$

On déduit que $r \mapsto M(r)$ est dérivable à droite, de dérivée

$$M'_d(r) = 4\pi r^2 f(r).$$

On recommence avec $h<0$, pour obtenir le même genre d'encadrement, pour conclure : $M(r)$ est dérivable et $M'(r) = 4\pi r^2 f(r)$.

D'où :

$$M(R) = \int_0^R 4\pi r^2 f(r)\,dr = \int_0^R 4\pi r^2(ar+b)\,dr$$

$$= 4\pi\left[a\frac{r^4}{4} + b\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \pi\left(aR^4 + \frac{4}{3}bR^3\right) = \pi R^3\left(aR + \frac{4}{3}b\right).$$

CQFD

48.(*) Montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x^2}{e^x-1}\,dx$

a) L'intégrale $\int_0^\infty x^2 e^{-nx}\,dx$ converge car $x^2e^{-nx} \underset{\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$. On la calcule par intégrations par parties :

$$\int_0^M x^2 e^{-nx}\,dx = \left[x^2\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^M + \frac{2}{n}\int_0^M x e^{-nx}\,dx$$
$$= -\frac{M^2}{n}e^{-nM} + \frac{2}{n}\left(\left[x\frac{e^{-nx}}{-n}\right]_0^M + \int_0^M \frac{e^{-nx}}{n}\,dx\right)$$
$$= \underbrace{\left(-\frac{M^2}{n} - \frac{2M}{n^2} - \frac{2}{n^3}\right)e^{-nM}}_{\to 0\ (M\to+\infty)} + \frac{2}{n^3}$$

d'où $\boxed{\int_0^\infty x^2e^{-nx}\,dx = \frac{2}{n^3}}$ pour tt $n\geq 1$.

b) $\sum_{n\geq 1} x^2e^{-nx}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ puisque, si l'on pose $f_n(x) = x^2e^{-nx}$, on obtient $f_n'(x) = x(2-nx)e^{-nx}$ d'où $\sup_{x\in\mathbb{R}_+}|f_n(x)| = f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n^2}e^{-2}$.

Ainsi : $\forall x\in\mathbb{R}_+\ \forall n\geq 1\quad |f_n(x)| \leqslant \frac{4e^{-2}}{n^2}$ et la cv unif. de $\sum f_n$.

Pour tout $y\in\mathbb{R}_+$, on aura donc :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\int_0^y x^2e^{-nx}\,dx}_{g_n(y)} = \int_0^y \sum_{n=1}^{\infty} x^2e^{-nx}\,dx \qquad (*)$$

$\sum_{n\geq 1} g_n(y)$ converge aussi uniformément sur $\mathbb{R}_+$ car $g_n(y)$ est croissante majorée par $\int_0^\infty x^2e^{-nx}\,dx = \frac{2}{n^3}$ pour tout $y\in\mathbb{R}_+$ (et $\sum\frac{1}{n^3}$ converge). On aura donc :

$$\lim_{y\to+\infty}\sum_{n\geq 1} g_n(y) = \sum_{n\geq 1}\lim_{y\to+\infty} g_n(y) \qquad \text{(interversion des limites)}$$

Ici, en passant à la limite pour $y\to+\infty$ dans $(*)$:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\int_0^\infty x^2e^{-nx}\,dx}_{\frac{2}{n^3}} = \int_0^\infty \sum_{n\geq 1} x^2e^{-nx}\,dx$$

d'où $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^3} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \sum_{n\geq 1} x^2e^{-nx}\,dx$

((*) réf. ex48 du Lehning V.4.5.48 p104)

Comme $\sum_{n\geq 1} x^2 e^{-nx} = x^2 \sum (e^{-x})^n = \frac{x^2}{e^x-1}$ pour $x>0$, on en déduit :

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^3} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{x^2}{e^x-1}\,dx}$$

Soit $F : [1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$Y \longmapsto \frac{1}{Y}\int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}}$$

Mq F est bien définie et tend vers 0 quand Y tend vers $+\infty$ (On pourra diviser l'intervalle d'intégration $[1,Y]$ en 2 intervalles $[1,A]$ et $[A,Y]$ avec un choix convenable du réel A)

(ext. du pb Polytechnique 90, RMS 90-91 n° 6553, AN4 le I.4.c)

$\lim_{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\ln t}} = 0$ donc il existe $A>0$ tq $t>A \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\ln t}} \leq \varepsilon$

$$\Rightarrow \frac{1}{Y}\int_A^Y \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}} \leq \varepsilon\,\frac{Y-A}{Y} \leq \varepsilon$$

$A>1$ étant fixé, $\int_1^A \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}}$ converge car $\frac{1}{\sqrt{2\ln t}} \underset{1}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{t-1}}$

(ou encore grâce au chgt de variable $u=\ln t$, puisqu'on obtient alors :

$$\int_1^A \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}} = \int_0^{\ln A} \frac{e^u\,du}{\sqrt{2u}} \quad \text{où} \quad \frac{e^u}{\sqrt{2u}} \underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{u}} \quad \text{et} \int_0^{\ln A} \frac{du}{\sqrt{u}} \text{ converge ! })$$

Ainsi il existe Y_0 tq $Y>Y_0 \Rightarrow \frac{1}{Y}\int_1^A \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}} \leq \varepsilon$

donc $Y>Y_0 \Rightarrow \frac{1}{Y}\int_1^Y \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}} \leq \frac{1}{Y}\int_1^A \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}} + \frac{1}{Y}\int_A^Y \frac{dt}{\sqrt{2\ln t}} \leq 2\varepsilon$

ie $\lim_{Y\to+\infty} F(Y) = 0$